மனோன்மணியம் சுந்தரனார் பல்கலைக்கழகம்

Manonmaniam Sundaranar University

Reaccredited with 'A' Grade (CGPA 3.13 Out of 4.0) by NAAC (3rd Cycle)

Tirunelveli - 627 012, Tamilnadu, India.

தொலைதூர இயக்குனர்

&

தொடர் கல்வி

அளவு நுட்பங்கள்

மனோன்மணியம் சுந்தரனார் பல்கலைக்கழகம்

திருநெல்வேலி

II B. COM (IV செமஸ்டர்) - CBCS இன் கீழ்

பகுதி III - மேஜர் கோர் - 7

அளவு நுட்பங்கள்

குறிக்கோள்கள்

1. வணிகத்திற்குப் பொருந்தக்கூடிய கணித நுட்பங்களைப் பற்றிய அடிப்படை அறிவை வழங்குதல்.

2. நிர்வாகச் சிக்கல்களுக்கு நடைமுறை தீர்வுகளைக் கண்டறிய தர்க்கரீதியான யோசனையை வழங்குதல்.

3. வணிகத்திற்குப் பொருந்தக்கூடிய புள்ளியியல் நுட்பங்களின் அடிப்படை அறிவை வழங்குதல்.

4. வணிகத்தில் தரவை அளவிடுவதற்கான புள்ளியியல் நுட்பங்களைப் பயன்படுத்த மாணவர்களை செயல்படுத்துதல்.

அலகு I:

பகுப்பாய்வு வடிவியல்- ஒரு நேர் கோட்டின் விமானம்-சரிவில் இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் - நேர் கோட்டின் சமன்பாடு - இரண்டு கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளி - பயன்பாடுகள் (1) தேவை மற்றும் வழங்கல் (2) செலவு-வெளியீடு (3) பிரேக்-ஈவன் பகுப்பாய்வு

அலகு II :

மேட்ரிக்ஸ் - பொருள் - வகைகள் - மெட்ரிக்ஸின் இயற்கணிதம் - கூட்டல் மற்றும் கழித்தல் - அளவிடல் பெருக்கல் - அணிகளின் பெருக்கல் - ஒரு மேட்ரிக்ஸின் இடமாற்றம் - டிடர்மினன்ட் - மைனர்கள் மற்றும் காஃபாக்டர்கள் - மேட்ரிக்ஸின் தலைகீழ் - மேட்ரிக்ஸ் முறையைப் பயன்படுத்தி ஒரே நேரத்தில் நேரியல் சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பது.

அலகு III:

மையப் போக்கு - சராசரி - இடைநிலை - முறை - வடிவியல் சராசரி .சிதறல்-வரம்பு - காலாண்டு விலகல் - சராசரி விலகல் - நிலையான விலகல் - மாறுபாட்டின் இணை செயல்திறன். வளைவு - வளைவுத்தன்மையைப் படிக்கும் முறைகள் - கார்ல் பியர்சனின் ஸ்கேவ்னஸின் இணை செயல்திறன் - பவுலியின் வளைவின் இணை

செயல்திறன்.

அலகு IV:

தொடர்பு - பொருள் - வகைகள்-சிதறல் வரைபடம் - கார்ல் பியர்சனின் இணை-திறன் தொடர்பு- தரவரிசை தொடர்பு - ஒரே நேரத்தில் விலகல் முறை. பின்னடைவு பகுப்பாய்வு – பயன்கள் பின்னடைவு கோடு – பின்னடைவு சமன்பாடுகள் – குறைந்தபட்ச சதுர முறை - உண்மையான சராசரி மற்றும் அனுமான சராசரி முறையிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட விலகல்கள்.

அலகு V:

குறியீட்டு எண்கள் - பொருள் - வகைகள் - அதன் சிக்கல்கள் - குறியீட்டு எண்களை உருவாக்கும் முறைகள் - எடையில்லாத மற்றும் எடையுள்ள குறியீடுகள் - குறியீட்டு எண் சோதனைகள் - நுகர்வோர் விலை குறியீட்டு எண்கள் - நேரத் தொடரின் பகுப்பாய்வு - பொருள் - முக்கியத்துவம் - நேரத் தொடரின் கூறுகள் - மதச்சார்பற்ற போக்கு, பருவகால, சுழற்சி மற்றும் ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் – போக்கின் அளவீடு - கிராஃபிக் முறை-அரை சராசரி முறை - நகரும் சராசரி முறை - குறைந்தபட்ச சதுர முறை.

உரை / குறிப்பு புத்தகங்கள்

1. டி.எஸ்.சஞ்செதி & வி.கே. கபூர், வணிகக் கணிதம் சுல்தான் சந்த் அண்ட் சன்ஸ், புது தில்லி.

2. எம். மனோகரன் & சி. இளங்கோ, வணிகக் கணிதம், பழனி பாரமவுண்ட் பப்ளிகேஷன்ஸ், பழனி.

3. டாக்டர். எஸ்.பி. குப்தா, புள்ளியியல் முறை, சுல்தான் சந்த் & சன்ஸ், புது தில்லி.

4. ஆர்.எஸ்.என். பிள்ளை & பகவதி, புள்ளியியல்-கோட்பாடு மற்றும் நடைமுறை, எஸ்.எஸ். சந்த் & கோ.

5. எம். வில்சன், வணிக புள்ளியியல், ஹிமாலயா பப்ளிஷிங் ஹவுஸ், மும்பை.

6. டாக்டர் எம். மனோகரன், புள்ளியியல் முறைகள், பழனி

பாரமவுண்ட் பப்ளிகேஷன்ஸ், பழனி.

7. ஜி.கே. ரங்கநாத், வணிகக் கணிதத்தின் பாடப் புத்தகம், ஹிமாலயா பப்ளிஷிங் ஹவுஸ், டெல்லி.

8. டி.சி.சஞ்செட்டி & பி.எம். அகர்வால், வணிகக் கணிதம், சுல்தான் சந்த் அண்ட் சன்ஸ், புது தில்லி.

முடிவுகள்:

1. வணிகத் துறையில் பகுப்பாய்வு வடிவவியலின் நடைமுறை பயன்பாடுகளை பகுப்பாய்வு செய்ய.

2. மேட்ரிக்ஸ் அல்ஜீப்ரா, ஸ்கேலார் பெருக்கல் மற்றும் மேட்ரிக்ஸின் தலைகீழ் ஆகியவற்றைக் கண்டறியவும்.

3. மையப் போக்கின் அளவீடுகளை அறிந்து, சராசரியை அளவிடுவதற்கு விண்ணப்பிக்கவும்.

4. மாறுபாடுகளை மதிப்பிடுவதற்கு பயனுள்ள சிதறலின் அளவீடுகளில் கருவிகளைப் பயன்படுத்துதல்.

5. தொடர்பு குணகத்தைக் கணக்கிடுவதற்கான பல்வேறு முறைகளைப் பயன்படுத்துதல்.

6. எதிர்கால காலத்திற்கான மதிப்புகளை மதிப்பிடுவதற்கு பின்னடைவு பகுப்பாய்வைப் பயன்படுத்துதல்.

7. குறியீடுகள் மற்றும் நேரத் தொடர்கள் பற்றிய கருத்துக்களைப் புரிந்து கொள்ள.

அலகு – I - பகுப்பாய்வு வடிவியல்

பகுப்பாய்வு வடிவியல் என்பது இயற்கணிதத்தின் ஒரு கிளை ஆகும், இது டெஸ்கார்ட்ஸ் மற்றும் ஃபெர்மாட்டின் சிறந்த கண்டுபிடிப்பு ஆகும், இது கோடுகள், புள்ளிகள், வளைவுகள் போன்ற சில வடிவியல் பொருள்களின் மாதிரியாக்கத்தைக் கையாள்கிறது. இது ஒரு கணித பாடமாகும், இது இயற்கணித குறியீட்டு முறை மற்றும் சிக்கல்களைத் தீர்க்கும் முறைகளைப் பயன்படுத்துகிறது. இது இயற்கணித சமன்பாடுகள் மற்றும் வடிவியல் வளைவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பை நிறுவுகிறது. பகுப்பாய்வு வடிவவியலைக் குறிக்கப் பயன்படுத்தப்படும் மாற்றுச் சொல் "கோர்டினேட் ஜியோமெட்ரி" ஆகும்.

இது மையப்புள்ளிகள் மற்றும் தூரம், ஒருங்கிணைப்பு விமானத்தில் இணையான மற்றும் செங்குத்து கோடுகள், கோடு பிரிவுகளை பிரித்தல், கோட்டிற்கும் ஒரு புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள தூரம் மற்றும் பல போன்ற சில முக்கியமான தலைப்புகளை உள்ளடக்கியது. பகுப்பாய்வு வடிவவியலின் ஆய்வு முக்கியமானது, ஏனெனில் இது கணிதத்தின் அடுத்த நிலைக்கான அறிவை அளிக்கிறது. இது தர்க்கரீதியான சிந்தனை மற்றும் சிக்கலைத் தீர்க்கும் திறன்களைக் கற்றுக்கொள்வதற்கான பாரம்பரிய வழி. இந்த கட்டுரையில், பகுப்பாய்வு வடிவியல், சூத்திரங்கள், கார்ட்டீசியன் விமானம், பகுப்பாய்வு வடிவியல் மூன்று பரிமாணங்களில் பயன்படுத்தப்படும் சொற்கள், அதன் பயன்பாடுகள் மற்றும் சில தீர்க்கப்பட்ட சிக்கல்களைப் பற்றி விவாதிப்போம்.

பகுப்பாய்வு வடிவியல் என்றால் என்ன?

பகுப்பாய்வு வடிவியல்இது அல்ஜீப்ராவின் கிளை ஆகும், இதில் ஆய எண்கள் எனப்படும் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஜோடி எண்களைப் பயன்படுத்தி விமானத்தின் புள்ளியின் நிலையைக் கண்டறிய முடியும். இதுவும்

அழைக்கப்படுகிறது**ஒருங்கிணைப்பு வடிவியல்**அல்லது தி**கார்ட்டீசியன் வடிவியல்**. பகுப்பாய்வு வடிவவியல் என்பது செயற்கை வடிவவியலுக்கு முரண்பாடாகும், அங்கு ஆய அல்லது சூத்திரங்களின் பயன்பாடு இல்லை. சிக்கல்களைத் தீர்ப்பதற்கான கோட்பாடு அல்லது அனுமானமாக இது கருதப்படுகிறது. ஆனால் பகுப்பாய்வு வடிவவியலில், இது உள்ளூர் ஆயங்களைப் பயன்படுத்தி வடிவியல் பொருள்களை வரையறுக்கிறது. இந்த வடிவவியலை வரையறுக்க இயற்கணிதத்தையும் இது பயன்படுத்துகிறது.

ஆய வடிவவியல் இரு பரிமாண மற்றும் முப்பரிமாண வடிவவியலில் அதன் பயன்பாட்டைக் கொண்டுள்ளது. இது வடிவியல் வடிவங்களைக் குறிக்கப் பயன்படுகிறது. பகுப்பாய்வு வடிவவியலில் பயன்படுத்தப்படும் சொற்களைப் பற்றி அறிந்து கொள்வோம்.

- விமானம்
- ஒருங்கிணைப்புகள்

விமானங்கள்

பகுப்பாய்வு வடிவியல் எவ்வளவு முக்கியமானது மற்றும் பயனுள்ளது என்பதைப் புரிந்து கொள்ள, முதலில், விமானம் என்றால் என்ன? ஒரு தட்டையான மேற்பரப்பு இரு திசைகளிலும் முடிவில்லாமல் சென்றால், அது a எனப்படும்**விமானம்**. எனவே, இந்த விமானத்தில் ஏதேனும் புள்ளியைக் கண்டால், பகுப்பாய்வு வடிவவியலைப் பயன்படுத்தி அதைக் கண்டறிவது எளிது..X மற்றும் Y விமானத்தில் உள்ள புள்ளியின் ஆயங்களை நீங்கள் தெரிந்து கொள்ள வேண்டும்.

ஒருங்கிணைப்புகள்

ஆயத்தொலைவுகள் இரண்டு வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஜோடி, இது ஒரு விமானத்தில் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியின் இருப்பிடத்தை வரையறுக்கிறது. கீழே உள்ள பெட்டியின் உதவியுடன் அதைப் புரிந்துகொள்வோம்.

	ஏ	**பி**	**சி**

1			
2		எக்ஸ்	
3			

மேற்கண்ட கட்டத்தில், தி*நெடுவரிசைகள்*ஏ, பி, சி, மற்றும் தி என பெயரிடப்பட்டுள்ளன*வரிசைகள்*1, 2, 3 என லேபிளிடப்பட்டுள்ளது. x என்ற எழுத்தின் இடம் B2 அதாவது நெடுவரிசை B மற்றும் வரிசை 2. எனவே, B மற்றும் 2 ஆகியவை இந்தப் பெட்டியின் ஆயத்தொகுப்புகள், x.

ஒவ்வொரு நெடுவரிசையிலும் வரிசைகளிலும் பல பெட்டிகள் இருப்பதால், ஒரே ஒரு பெட்டியில் மட்டுமே x புள்ளி உள்ளது, மேலும் அதன் இருப்பிடத்தைக் கண்டறிவதன் மூலம் நாம் கண்டுபிடிக்கலாம்.*குறுக்குவெட்டு*அந்த பெட்டியின் வரிசை மற்றும் நெடுவரிசை. பகுப்பாய்வு வடிவவியலில் பல்வேறு வகையான ஆயத்தொலைவுகள் உள்ளன. அவற்றில் சில பின்வருமாறு:

- கார்ட்டீசியன் ஒருங்கிணைப்புகள்
- துருவ ஆயத்தொலைவுகள்
- உருளை ஆயத்தொகுப்புகள்
- கோள ஆயத்தொலைவுகள்

கார்ட்டீசியன் ஒருங்கிணைப்புகள்

மிகவும் நன்கு அறியப்பட்ட ஒருங்கிணைப்பு அமைப்பு கார்ட்டீசியன் ஒருங்கிணைப்பு ஆகும், அங்கு ஒவ்வொரு புள்ளியும் உள்ளது*எக்ஸ்* ஒருங்கிணைப்பு மற்றும் y-ஒருங்கிணைவு முறையே அதன் கிடைமட்ட நிலை மற்றும் செங்குத்து நிலையை வெளிப்படுத்துகிறது. அவை வழக்கமாக

வரிசைப்படுத்தப்பட்ட ஜோடியாக குறிப்பிடப்படுகின்றன மற்றும் (*எக்ஸ்,மற்றும்*) இந்த அமைப்பை முப்பரிமாண வடிவவியலுக்கும் பயன்படுத்தலாம், அங்கு ஒவ்வொரு புள்ளியும் வரிசைப்படுத்தப்பட்ட மும்மடங்கு ஆயங்களால் குறிப்பிடப்படுகிறது (*எக்ஸ்,மற்றும்,உடன்*) யூக்ளிடியன் விண்வெளியில்.

துருவ ஆயத்தொலைவுகள்

துருவ ஒருங்கிணைப்புகளின் விஷயத்தில், ஒரு விமானத்தின் ஒவ்வொரு புள்ளியும் தூரத்தால் குறிக்கப்படுகிறது.*ஆர்*தோற்றம் மற்றும் கோணத்தில் இருந்து*நான்*துருவ அச்சில் இருந்து.

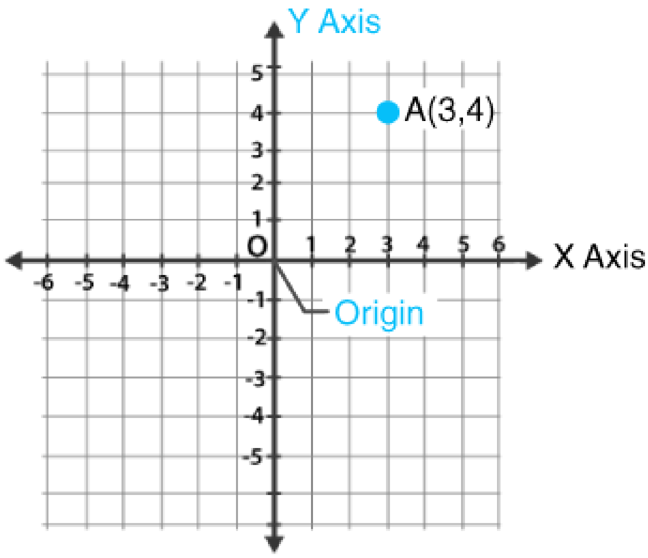
உருளை ஆயத்தொகுப்புகள்

உருளை ஆயங்களில், அனைத்து புள்ளிகளும் அவற்றின் உயரம், z- அச்சில் இருந்து ஆரம் மற்றும் கிடைமட்ட அச்சைப் பொறுத்து xy-தளத்தில் திட்டமிடப்பட்ட கோணம் ஆகியவற்றால் குறிப்பிடப்படுகின்றன. உயரம், ஆரம் மற்றும் கோணம் ஆகியவை முறையே h, r மற்றும் θ ஆல் குறிக்கப்படுகின்றன.

கோள ஆயத்தொலைவுகள்

கோள ஆயங்களில், விண்வெளியில் உள்ள புள்ளியானது தோற்றத்திலிருந்து (ρ), கிடைமட்ட அச்சைப் (θ) பொறுத்து xy-தளத்தில் திட்டமிடப்பட்ட கோணம் மற்றும் z- அச்சைப் பொறுத்து மற்றொரு கோணம் (φ) ஆகியவற்றால் குறிக்கப்படுகிறது.) கார்ட்டீசியன் விமானம்

ஒருங்கிணைப்பு வடிவவியலில், ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஆயத் தளம் அல்லது கார்ட்டீசியன் விமானத்தில் மட்டுமே அமைந்துள்ளதாகக் கூறப்படுகிறது.



மேலே உள்ள வரைபடம் உள்ளது*x-அச்சு*மற்றும்*y-அச்சு*அது அளவுகோலாக உள்ளது. x-அச்சு விமானம் முழுவதும் இயங்குகிறது மற்றும் Y-அச்சு x-அச்சுக்கு சரியான கோணத்தில் இயங்குகிறது. இது மேலே விளக்கப்பட்ட பெட்டியைப் போன்றது.

தோற்றம்:இது அச்சின் குறுக்குவெட்டு புள்ளியாகும் (x-அச்சு மற்றும் y-அச்சு). இந்த கட்டத்தில் x மற்றும் y-அச்சு இரண்டும் பூஜ்ஜியமாகும்.

அச்சின் வெவ்வேறு பக்கங்களின் மதிப்புகள்:

x-**அச்சு**- இந்த அச்சின் வலது புறத்தில் உள்ள மதிப்புகள் நேர்மறையாகவும் இடது புறத்தில் உள்ளவை எதிர்மறையாகவும் இருக்கும்.

y-**அச்சு**- தோற்றத்திற்கு மேலே உள்ள மதிப்புகள் நேர்மறையாகவும், தோற்றத்திற்குக் கீழே எதிர்மறையாகவும் இருக்கும்.

ஒரு புள்ளியைக் கண்டறிய:முதலில் X அச்சின் இருப்பிடத்தையும் அடுத்து Y-அச்சையும் எழுதும் வரிசையில் ஒரு விமானத்தைக் கண்டறிய நமக்கு இரண்டு எண்கள் தேவை. இருவரும் விமானத்தின் ஒற்றை மற்றும் தனித்துவமான நிலையைச் சொல்வார்கள். விமானத்தில் உள்ள புள்ளிகளின் வரிசையை நீங்கள் கட்டாயமாகப் பின்பற்ற வேண்டும், அதாவது, x ஒருங்கிணைப்பு எப்போதும் ஜோடியிலிருந்து முதலில் இருக்கும். (x, y).

மேலே உள்ள படத்தைப் பார்த்தால், புள்ளி A ஆனது x அச்சில் 3 மதிப்பையும், Y

அச்சில் 2 மதிப்பையும் கொண்டுள்ளது. இவை (3, 2) என குறிப்பிடப்படும் புள்ளி A இன் செவ்வக ஆயங்கள் ஆகும்.

கார்ட்டீசியன் ஆயக்கூறுகளைப் பயன்படுத்தி, முப்பரிமாண வடிவவியலில் ஒரு நேர் கோடுகள், விமானங்களின் சமன்பாடு, சதுரங்கள் மற்றும் பெரும்பாலும் சமன்பாடுகளை வரையறுக்கலாம். பகுப்பாய்வு வடிவவியலின் முக்கிய செயல்பாடு என்னவென்றால், அது பல்வேறு வடிவியல் வடிவங்களை எண்ணியல் முறையில் வரையறுத்து பிரதிநிதித்துவப்படுத்துகிறது. இது வடிவங்களிலிருந்து எண் தகவல்களையும் பிரித்தெடுக்கிறது.

பகுப்பாய்வு வடிவியல் சூத்திரங்கள்

வடிவியல் உருவங்களின் அளவீடுகளைக் கண்டறிய வரைபடங்கள் மற்றும் ஒருங்கிணைப்புகள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. பகுப்பாய்வு வடிவவியலில் பல முக்கியமான சூத்திரங்கள் உள்ளன. அறிவியலும் பொறியியலும் வெவ்வேறு அளவுகளில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் விகிதத்தைப் பற்றிய ஆய்வை உள்ளடக்கியிருப்பதால், அது சம்பந்தப்பட்ட அளவுகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பைக் காட்ட உதவுகிறது. "கால்குலஸ்" எனப்படும் கணிதத்தின் கிளைக்கு பகுப்பாய்வு வடிவவியலின் தெளிவான புரிதல் தேவை. இங்கே, சில முக்கியமானவை தூரம், சாய்வு அல்லது கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டறிய பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

தூர சூத்திரம்

இரண்டு புள்ளிகளும் A மற்றும் B ஆக இருக்கட்டும், ஆயத்தொலைவுகள் இருக்க வேண்டும் (x_1, மற்றும்$_1$) மற்றும் (x_2, மற்றும்$_2$) முறையே. இவ்வாறு, இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் என வழங்கப்படுகிறது

$$d = \sqrt{[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]}$$

நடுப்புள்ளி தேற்றம் சூத்திரம்

A மற்றும் B ஒரு விமானத்தில் உள்ள சில புள்ளிகளாக இருக்கட்டும், இது ஒரு கோடு அமைக்க இணைக்கப்பட்டு, ஆயத்தொலைவுகளைக் கொண்டுள்ளது (x_1, மற்றும்$_1$) மற்றும் (x_2, மற்றும்$_2$), முறையே. M(x, y) என்பது புள்ளி A மற்றும் B ஐ இணைக்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளி என்று வைத்துக்கொள்வோம், அதன் பிறகு அதன் சூத்திரம் வழங்கப்படுகிறது;

$M(x, y) = [(x_1+x_2)/2, (y_1+y_2)/2)]$

ஆங்கிள் சூத்திரம்

இரண்டு கோடுகள் சாய்வு மீ இருக்கட்டும்$_1$மற்றும் எம்$_2$மற்றும் θ என்பது A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு கோடுகளுக்கு இடையே உருவான கோணமாகும், இது இவ்வாறு குறிப்பிடப்படுகிறது;

$\tan \theta = (m_1-m_2)/ (1+m_1m_2)$

பிரிவு சூத்திரம்

A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு வரிகளுக்கு ஆயத்தொலைவுகள் இருக்கட்டும் (x_1, மற்றும்$_1$) மற்றும் (x_2, மற்றும்$_2$), முறையே. ஒரு புள்ளி P என்பது m:n என்ற விகிதத்தில் உள்ள இரண்டு கோடுகள், பின்னர் P இன் ஆயத்தொகுப்புகள் வழங்கப்படுகின்றன;

- **When the ratio m:n is internal:**

$$\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

- **When the ratio m:n is external:**

$$\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

முப்பரிமாணங்களில் பகுப்பாய்வு வடிவியல்

இதில், நாங்கள் கருதுகிறோம்*மூன்று மடங்கு (*a, b, c) இவை உண்மையான எண்கள் மற்றும் இந்த தொகுப்பை முப்பரிமாண எண் இடைவெளி என்று அழைத்து அதைக் குறிக்கும் R'. மூன்றில் உள்ள அனைத்து கூறுகளும் அழைக்கப்படுகின்றன **ஒருங்கிணைப்புகள்**.

ஒரு வடிவியல் இடத்தில் முப்பரிமாண எண் இடம் எவ்வாறு குறிப்பிடப்படுகிறது என்பதைப் பார்ப்போம்.

முப்பரிமாண இடைவெளியில், O புள்ளியில் வெட்டும் மூன்று பரஸ்பர செங்குத்து கோடுகளை நாங்கள் கருதுகிறோம். இந்த கோடுகள் 0 இலிருந்து தொடங்கும் ஆய அச்சுகளாக குறிப்பிடப்படுகின்றன, மேலும் அவை ஒவ்வொன்றிலும் ஒரே மாதிரியான எண் அளவுகள் அமைக்கப்பட்டுள்ளன.

பகுப்பாய்வு வடிவியல் பயன்பாடுகள்

பொறியியல் மற்றும் இயற்பியல் போன்ற துறைகளில் பகுப்பாய்வு வடிவியல் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. மேலும், இது விண்வெளி அறிவியல், ராக்கெட் அறிவியல், விமானம், விண்வெளி விமானங்கள் மற்றும் பல துறைகளில் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. பகுப்பாய்வு வடிவியல் பின்வரும் பல விஷயங்களை சாத்தியமாக்கியுள்ளது:

- கொடுக்கப்பட்ட கோடுகள் செங்குத்தாக உள்ளதா அல்லது இணையாக உள்ளதா என்பதைக் கண்டறியலாம்.
- கோடு பிரிவின் நடுப்புள்ளி, சமன்பாடு மற்றும் சாய்வை நாம் தீர்மானிக்க முடியும்.
- புள்ளிகளுக்கு இடையிலான தூரத்தை நாம் காணலாம்.
- விமானத்தில் உள்ள புள்ளிகளால் உருவாகும் பலகோணத்தின் பகுதியின் சுற்றளவையும் நாம் தீர்மானிக்க முடியும்.
- நீள்வட்டம், வளைவுகள் மற்றும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளை வரையறுக்கவும்.

இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம்

A(x1, y1) மற்றும்*பி(x2, y2)*விமானத்தில் ஏதேனும் இரண்டு புள்ளிகள் இருக்க வேண்டும். இப்போது இந்த இரண்டு புள்ளிகளுக்கும் இடையே உள்ள தூரத்தைக் கண்டறியவும்.

P மற்றும் Q ஆகியவை முறையே A மற்றும் B இலிருந்து x-அச்சு

வரையிலான செங்குத்துகளின் பாதமாக இருக்கட்டும். AR BQ க்கு செங்குத்தாக வரையப்பட்டது. வரைபடத்தில்இருந்து,

AR = PQ = OQ - OP = $x2- x1$ மற்றும் BR = BQ - RQ = y2- y1 y B(x2, y2) வலது கோணத்தில் இருந்து AR= PQ=OQ - OP = $x2- x1$ AndBR=BQ-RQ=y2-y1

FromrightangleARB

y2-y1 = R

$AB^2 = AR^2+RB^2 = (x2-x1)^2+ (y2-y1)^2$

$\therefore AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

பிரச்சனை 1

புள்ளிகள் (-4, 0) மற்றும் (3, 0) இடையே உள்ள தூரத்தைக் கண்டறியவும்

தீர்வு

புள்ளிகள் (-4, 0) மற்றும் (3, 0) x அச்சில் உள்ளன. எனவே

Thepoints(-4, 0)and(3,0)lie onthex-axis.Hence

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$AB=\sqrt{(3-(-4))^2+(0-0)^2}$

$AB =\sqrt{7^2+0^2}$

AB=7

AB = 49

பிரச்சனை 2

மூன்று புள்ளிகள் (4, 2), (7, 5) மற்றும் (9, 7) ஒரு நேர் கோட்டில் இருப்பதைக் காட்டு

தீர்வு

புள்ளிகள் A (4, 2), B (7, 5) மற்றும் C (9, 7) ஆக இருக்கட்டும். தூர சூத்திரத்தால்

$AB^2= (4-7)^2+(2-5)^2= (-3)^2 +(-3)^2=9+9= 18$

$BC^2= (9-7)^2+ (7-5)^2 =(2)^2+ (2)^2 =4+4=8$

$AC^2= (9-4)^2+(7-2)^2= (5)^2+ (5)^2=25+25=50$

So,AB =18=9×2=32;BC=8=4×2=22;

CA= 50=25 ×2=52

இது AB+ BC = 3 2 + 2 2 = 5 2 கொடுக்கிறது எனவே A, B மற்றும் C புள்ளிகள்

கோலினியர் ஆகும்.

பிரச்சனை 3

புள்ளிகள் செங்கோண முக்கோண A (–3, –4), B (2, 6) மற்றும் C (–6, 10)

ஆகியவற்றின் முனைகளா என்பதைத் தீர்மானிக்கவும்..

தீர்வு

தூர சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துதல்

$d= x_2- x_1^2+y_2-y_1^2$

$AB^2=(2--3)^2+ (6--4)^2= (5)^2 + (10)^2=25+100= 125$

$BC^2=(-6-2)^2+(10-6)^2 = (-8)^2+ (4)^2= 64+16=80$

$AC^2= (-6--3)^2+ (10--4)^2= (-3)^2 +(14)^2= 9+196= 205$

$\therefore AB^2+BC2=125 +80=205=CA^2$

எனவே ஏபிசி என்பது செங்கோண முக்கோணமாகும், ஏனெனில் ஒரு பக்கத்தின் சதுரம் மற்ற இரண்டு பக்கங்களின் சதுரங்களின் கூட்டுத்தொகைக்கு சமம்.

பிரச்சனை 5

வரிசையாக எடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் (–7, –3), (5, 10), (15, 8) மற்றும் (3, –5) ஒரு இணையான வரைபடத்தின் மூலைகள் என்பதை நிரூபிக்கவும்.

தீர்வு

A, B, C மற்றும் D ஆகியவை முறையே (-7, -3), (5, 10), (15, 8) மற்றும் (3, -5) புள்ளிகளைக் குறிக்கட்டும்.

தூர சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்துதல்

$d=\boldsymbol{x2-x1^2}+\boldsymbol{y2-y1^2}$

$AB^2= (5--7)^2+ (10- -3)^2=(12)^2 + (13)^2=144+169=313$

$BC^2=(15-5)^2+(8-10)^2 = (10)^2+ (-2)^2 =100+4 =104$

$CD^2=(3-15)^2+ (-5-15)^2=(-12)^2 +(-13)^2= 144+196= 313$

$DA^2=(3--7)^2+(-5--3)^2 =(10)^2+ (-2)^2 =100+4 =104$

So, AB=CD=313

*BC=DA=104

எதிர் பக்கங்கள் சமம். எனவே ஏபிசிடி ஒரு இணையான வரைபடம்.

பிரச்சனை 6

பின்வரும் புள்ளிகள் (3, –2), (3, 2), (–1, 2) மற்றும் (–1, –2) வரிசையில் எடுக்கப்பட்டவை ஒரு சதுரத்தின் செங்குத்துகள் என்பதைக் காட்டுங்கள்.

தீர்வு

செங்குத்துகளை A (3, -2), B (3, 2), C (-1, 2) மற்றும் D (-1, -2) என எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

$AB^2= (3-3)^2+(2 --2)^2 = (0)^2 + (4)^2 =0+16 =16$

$BC^2=(3+1)^2+ (2-2)^2 =(4)^2+ (0)^2 =16+0 =16$

$CD^2=(-1+1)^2+ (2+2)^2 =(0)^2 + (4)^2=0+16=16$

$DA^2=(-1-3)^2+(-2--2)^2 =(-4)^2 + (0)^2= 16+0= 16$

AB = BC = CD = DA = 16 = 4. (அதாவது, அனைத்து பக்கங்களும் சமம்.)

$AC^2= (-1-3)^2+(2--2)^2=(-4)^2+ (4)^2=16+16=32$

$BD^2=(-1-3)^2+(-2-2)^2=(-4)^2 +(-4)^2=16+16= 32$

AC=BD=32=42 (அதாவது மூலைவிட்டங்கள் சமம்) எனவே A,B,C மற்றும் D புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தை உருவாக்குகின்றன.

ஒரு நேர்கோட்டின் சாய்வு

நேர்க்கோட்டின் செங்குத்தான தன்மை மற்றும் திசையின் அளவு அதன் சாய்வால் கொடுக்கப்படுகிறது. சாய்வு பொதுவாக m என்ற எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது.

கொடுக்கப்பட்ட படத்தில், கொடுக்கப்பட்ட கோட்டின் சாய்வின் கோணம் x- அச்சுடன் இருந்தால்∅, பின்னர் கோட்டின் சாய்வு பழுப்பு நிறத்தால் குறிக்கப்படுகிறது∅.

1. இரண்டு புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வு

$$m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

2. x – அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும் கோட்டின் சாய்வு

$$m = \frac{y - y1}{x2 - x1}$$

$$m = \frac{0}{x2 - x1}$$

3. y- அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும் கோட்டின் சாய்வு

$$m = \frac{y2 - y1}{x - x}$$

$$m = \frac{y2 - y1}{0}$$

4. தோற்றம் மற்றும் எந்தப் புள்ளியையும் இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வு

$$m = \frac{y1}{x1}$$

5. சமன்பாட்டின் சாய்வு

$$m = \frac{-a}{b}$$

a= x **இன் இணை-திறன்**

b=y **இன் இணை-திறன்**

பிரச்சனை 1

(i) (-1,3) மற்றும் (2,5) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடுகளின் சாய்வைக் கண்டறியவும்

(ii) (-2,-1) மற்றும் (1,3)

தீர்வு

$m = \underline{\boldsymbol{y2 - y1}}$

$\boldsymbol{x2 - x1}$

(i) A= (-1,3) மற்றும் B= (2,5)

கோட்டின் சாய்வு AB $m =$ $\underline{\mathbf{5 - 3}}$

$\mathbf{2 - -1}$

= 2/3

(ii) A= (-2,-1) மற்றும் B= எனலாம் (1,3)கோட்டின் சாய்வு

AB = $m =$ $\underline{\mathbf{3 - -1}}$

$\mathbf{1 — 2}$

=4/3

பிரச்சனை 2

புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டின் சாய்வைக் கண்டறியவும்

(i) (-3,2) மற்றும் (4,2)

(ii) (2,5) மற்றும் (2,3)

(iii) (0,0) மற்றும் (1,2)

தீர்வு

$m = \dfrac{y2 - y1}{x2 - x1}$

(i) A= (-3,2) மற்றும் B=(4,2)

கோட்டின் சாய்வு AB = $m = \dfrac{2 - 2}{4 - -3}$

$m = \dfrac{0}{7}$

குறிப்பு: m= 0 எனில், கோடு x- அச்சுக்கு இணையாக இருப்பதைக் காட்டுகிறது (ii) A= (2,5) மற்றும் B=(2,3)

கோட்டின் சாய்வு AB = $m = \dfrac{3 - 5}{2 - 2}$

= -2/0

குறிப்பு: m= 0 எனில், கோடு y- அச்சுக்கு இணையாக இருப்பதைக்

காட்டுகிறது (iv) A= (0,0) மற்றும் B= (1,2)

m = y1/x1

கோட்டின் சாய்வு AB = 2/1

= 2/1 = 2

குறிப்பு: நாங்கள் பயன்படுத்தினோம் m = y1/x1 ஃபார்முலா, ஏனெனில் தோற்றத்திலிருந்து கோடு செல்கிறது.

பிரச்சனை 3

கோடுகளின் சமன்பாட்டின் சாய்வைக் கண்டறியவும்

(i) 2x+5y-4=0

x-4y=3y

=x+1

சமன்பாட்டின் சாய்வு

m = -a / b

a= x இன் இணை-திறன்

b=y இன் இணை-திறன்

(i) 2x+5y-4=0 a=2 b=5

M = -a/b

M = -2/5

(ii) x-4y=3 a=1 b= -4

M = - 1 / - 4

(iii) y=x+1

-x+y=1 a= -1 b=1

$$\boldsymbol{m} = \frac{-(-\mathbf{1})}{\mathbf{1}}$$

$$\boldsymbol{m} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}} = 1$$

பிரச்சனை 4

புள்ளிகள் (2,-4) (4,-2) மற்றும் (7,1) கோலினியர் என்று காட்டுங்கள்

தீர்வு

A= (2,-4) B= (4,-2) மற்றும் C= (7, 1)

AB இன் சாய்வு $= \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$

$= \frac{-2-(-4)}{4-2}$

$= \frac{2}{2} = 1$

SlopeofBC$= \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$

$= \frac{1-(-2)}{7-4}$

$= \frac{3}{3} = 1$

AB இன் சாய்வு = BC இன் சாய்வு நிரூபிக்கப்பட்டது எனவே A,B மற்றும் C

ஆகியவை ஒரே கோட்டில் உள்ளன.

பிரச்சனை 5

புள்ளிகள் (K,3) (-6,4) மற்றும் (-10,5) கோலினியர் என்றால் K இன் மதிப்பைக்

கண்டறியவும்.

தீர்வு

A= (K,3), B= (-6,4) மற்றும் C= (-10,5)

A,B மற்றும் C ஆகியவை கோலினியராக இருக்கும்போது

AB இன் சாய்வு = slopeofBC

$\frac{\mathbf{4-3}}{-\mathbf{6}-\boldsymbol{K}} = \frac{5-4}{-10-(-6)}$

1/-6-k =1 / -4

(குறுக்கு பெருக்கல்)

-6-K= - 4

-K =-4+6

- K= 2K=-2

பிரச்சனை 6

(-2 , 3) மற்றும் (4 , 2) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு (3,4) மற்றும் (- 3 , 5) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்கு இணையாக இருப்பதைக் காட்டு

தீர்வு

A= (-2 , 3) மற்றும் B= (4 , 2)

C= (3,4) மற்றும் D= (- 3 , 5)

AB இன் சாய்வு $=\frac{Y2 - Y1}{X2 - X1}=\frac{2 - 3}{4 - (-2)} =\frac{- 1}{6}$

AB இன் சாய்வு =$\underline{Y2 - Y1}$

$= \frac{5-6}{3-3} = \frac{-1}{-6}$

X2 – X1 3- 3 -6

m1= m2 நிரூபிக்கப்பட்டது

எனவே AB என்ற கோடு CD க்கு இணையாக உள்ளது

பிரச்சனை 7

(3,2) மற்றும் (2,-3) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோடு (4,3) மற்றும் (2,k) இணைக்கும் கோட்டிற்கு இணையாக இருந்தால். K மதிப்பைக் கண்டறியவும்

தீர்வு

A= (3,2) மற்றும் B= (2,-3)

C= (4,3) மற்றும் D= (2,K)

AB இன் சாய்வு = CD இன் சாய்வு

$$\frac{-3-2}{2-3} = \frac{K-3}{2-4}$$

$$\frac{-5}{-1} = \frac{K-3}{-2}$$

(குறுக்கு பெருக்கல்)

$10 = -K + 3$

10-3=-K

- K=7 K=-7

பிரச்சனை 8

புள்ளிகள் (3,- 4) மற்றும் (2,1) இணைக்கும் கோடு (-2 , 2) மற்றும் (3,3) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்கு செங்குத்தாக இருப்பதைக் காட்டு

A= (3,- 4) மற்றும் B= (2,1)

C= (-2 , 2) மற்றும் D= (3,3)

$$\text{Slope of } AB = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{1-(-4)}{2-3} = \frac{5}{-1}$$

$$\text{Slope of } CD = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{3-2}{3-(-2)} = \frac{1}{5}$$

$m_1 \times m_2 = -1$

$-5 \times \frac{1}{5} = \frac{-5}{5} = -1$

நிரூபிக்கப்பட்டது

எனவே AB என்ற கோடு CD க்கு செங்குத்தாக உள்ளது.

பிரச்சனை 9

புள்ளிகளை (-3, 4) மற்றும் (2,-3) இணைக்கும் கோடுகள் (3,K) மற்றும் (2, -3) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்கு செங்குத்தாக இருந்தால். K இன் மதிப்பைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு

A= (-3, 4) மற்றும் B= (2,-3)

C= (3,K) மற்றும் D= (2, -3)

AB இன் சாய்வு $= \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{-3 - 4}{2 - (-3)} = \frac{-7}{-5}$

$\frac{-7}{5} \times m_2 = -1$

$M_2 = -1 \times \frac{-5}{7}$

$M_2 = \frac{5}{7}$

குறுவட்டு சாய்வு $= \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = M_2 = \frac{5}{7}$

$\frac{5}{7} = \frac{-3 - K}{2 - 3}$

$\frac{5}{7} = \frac{-3 - K}{-1}$

(குறுக்கு பெருக்கல்)

$-5 = -21 - 7K$

$-5 + 21 = -7K$

$16 = -7k$

$K = \frac{-16}{7}$

நேரான கோட்டின் சமன்பாடு

ஒரு கோடு a தொலைவில் இருந்தால் x அச்சுக்கு இணையாக இருந்தால், கோட்டின் சமன்பாடு$y = \pm a$. ஒரு கோடு y அச்சில் இருந்து b தொலைவில் y அச்சுக்கு இணையாக இருந்தால் அதன் சமன்பாடு$x = \pm b$ **புள்ளி-சாய்வு வடிவம்**: ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு மீ சாய்வு மற்றும் புள்ளியைக் கடந்து செல்லும் $(x_0,0)$ வழங்கியது. by$y - y_0 = m(x - x_0)$

இரண்டு புள்ளி வடிவம்: இரண்டு புள்ளிகள் வழியாக செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $x1$,1 மற்றும் $x2$, $y2$ வழங்கப்படுகிறது

$$y - y1 = \frac{y2 - y1}{x2 - x1} \quad x - x1$$

சாய்வு குறுக்கீடு வடிவம்: கோட்டின் சமன்பாடு y-அச்சில் குறுக்கீடு c ஐ உருவாக்கும் மற்றும் சாய்வு byy = mx+c

முறையே y-அச்சின் நேர்மறை அல்லது எதிர்மறை பக்கத்தில் குறுக்கீடு செய்யப்படுவதால் c இன் மதிப்பு நேர்மறை அல்லது எதிர்மறையாக இருக்கும் என்பதை நினைவில் கொள்ளவும்

குறுக்கீடு படிவம்:கோட்டின் சமன்பாடு x- மற்றும் y-அச்சுகளில் a மற்றும் b ஐ இடைமறிக்கும்
மூலம் வழங்கப்படுகிறது

X+Y = 1A

B

ஒரு கோட்டின் பொதுவான சமன்பாடு

Ax + By + C = 0 வடிவத்தின் எந்தச் சமன்பாடும், A மற்றும் B ஆகியவை ஒரே நேரத்தில் பூஜ்ஜியமாக இருக்காது, இது ஒரு கோட்டின் பொதுவான சமன்பாடு எனப்படும்.

பிரச்சனை 1

சரிவு 1/3 மற்றும் y குறுக்கீடுகள் 4 சாய்வு - இடைமறிப்பு கொண்ட கோட்டிற்கான சமன்பாட்டைக் கண்டறியவும்

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{mx} + \boldsymbol{c}$ m= 1/3 c=4Y =1x + 4

3

Y=x+12

3

3y=x+12

-x+3y=12

-x+3y-12=0

பிரச்சனை 2

(-1,3) மற்றும் சாய்வைக் கடந்து செல்லும் கோட்டின் சமன்பாட்டைக் கண்டறியவும்1/3 புள்ளி சாய்வு வடிவம்

$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y0}$=m($\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x0}$)

$\boldsymbol{y}-\ \mathbf{3}$= 1 $\boldsymbol{x}$— ($-\mathbf{1}$)3

$\boldsymbol{y}-\mathbf{3}$=1$\boldsymbol{x}$+$\mathbf{1}$

3

(குறுக்கு பெருக்கல்)

3y-3=x+1

-x+3y=1+3

-x+3y=4 அல்லது

-x+3y-4=0

பிரச்சனை 3

(0,-3) மற்றும் (-4,-5) (0,-3) மற்றும் (-4,-5) புள்ளிகளை இணைக்கும் கோட்டிற்கான

சமன்பாட்டைக் கண்டறியவும்

இரண்டு புள்ளி வடிவம்

$\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y1}$=$\underline{\boldsymbol{y2}-\ \boldsymbol{y1}}$ $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x1}$

$x2 - x1$

Y –(-3)=-5–(-3)X-0

-4–0

Y+3=-2X

-4

Y+3=1X

2

2y+6=x

-x+2y+6=0 or -x+2y=-6

பிரச்சனை 4

x மற்றும் y அச்சில் குறுக்கீடுகள் -3 மற்றும் 4 ஆகியவற்றின் வரி வெட்டுக்கான சமன்பாட்டைக் கண்டறியவும்.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad a= -3 \text{ and} b=4$$

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1$$

$$\frac{-4x+3y}{12} = 1$$

-4x+3y= 12 அல்லது -4x+3y-12=0

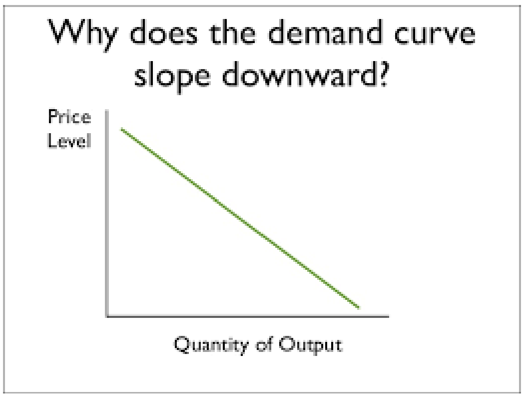
தேவை மற்றும் வழங்கல்

ஒரு குறிப்பிட்ட காலப்பகுதியில் ஒரு பொருளின் விலை மற்றும் கோரப்பட்ட அளவு ஆகியவற்றுக்கு இடையே எதிர்மறையான அல்லது தலைகீழ் உறவு இருப்பதாக கோரிக்கை சட்டம் கூறுகிறது.

வரையறை:

ஆல்ஃபிரட் மார்ஷல், "விற்கப்படும் தொகை அதிகமாக இருந்தால், அது வாங்குபவர்களைக் கண்டுபிடிக்கும் வகையில், அது வழங்கப்படும் விலை சிறியதாக இருக்க வேண்டும்; அல்லது வேறு வார்த்தைகளில் கூறுவதானால், விலை வீழ்ச்சியுடன் கோரப்பட்ட தொகை அதிகரிக்கிறது மற்றும் விலை ஏற்றத்துடன் குறைகிறது". ஃபெர்குசனின் கூற்றுப்படி, தேவையின் விதி என்னவென்றால், தேவைப்படும் அளவு விலைக்கு நேர்மாறாக மாறுபடும்.

எனவே மக்கள் குறைந்த விலையில் அதிகமாக வாங்குவார்கள் மற்றும் அதிக விலையில் குறைவாக வாங்குவார்கள், மற்றவை அப்படியே இருக்கும் என்று கோரிக்கை சட்டம் கூறுகிறது. மற்ற விஷயங்கள் அப்படியே இருப்பதால், பின்வரும் அனுமானங்களைக் குறிக்கிறோம்.



தேவை வளைவு கீழ்நோக்கி சாய்கிறது முக்கியமாக விளிம்பு பயன்பாடு குறையும் சட்டத்தின் காரணமாக. ஒரு பண்டத்தின் கூடுதல் அலகு குறைவான திருப்தியைத் தருவதாகக் குறையும் விளிம்புப் பயன்பாட்டுச் சட்டம் கூறுகிறது. எனவே, நுகர்வோர் குறைந்த விலையில் மட்டுமே அதிகமாக வாங்குவர்.

தேவை வளைவு கீழ்நோக்கி சாய்கிறது, **ஏனெனில் விளிம்பு பயன்பாட்டு வளைவும் கீழ்நோக்கி சாய்கிறது**.

வழங்கல் என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட காலப்பகுதியில் ஒரு விலையில் விற்கப்படும் பொருட்கள். ஒரு குறிப்பிட்ட விலையில் பொருட்கள் மற்றும் சேவைகளை விற்பனை செய்ய உற்பத்தியாளர்களின் திறன் மற்றும் எண்ணம்.

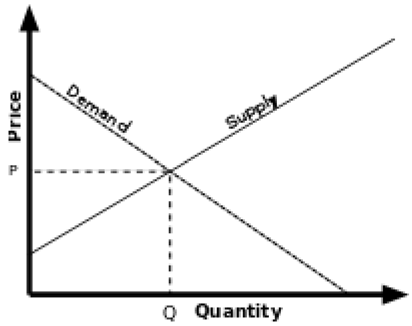
கொடுக்கப்பட்ட விலையில் ஒரு பொருளின் வழங்கல், அந்த விலையில் ஒரு யூனிட் நேரத்திற்கு விற்பனைக்கு உண்மையில் வழங்கப்படும் அளவு என வரையறுக்கலாம்.

வழங்கல் சட்டம் விலைக்கும் வழங்கலுக்கும் இடையே நேரடி உறவை நிறுவுகிறது. **நிறுவனங்கள் குறைந்த விலையில் குறைவாகவும் அதிக விலைக்கு அதிகமாகவும் வழங்குகின்றன**. "மற்ற விஷயங்கள் அப்படியே இருக்கின்றன, பொருட்களின் விலை உயரும்போது, அதன் விநியோகம் விரிவடைகிறது மற்றும் விலை குறையும்போது, அதன் விநியோக ஒப்பந்தங்கள்".

சந்தை சமநிலை

வழங்கல் மற்றும் தேவை வளைவுகள் வெட்டும் போது, சந்தை சமநிலையில் இருக்கும். இங்குதான் கோரப்படும் அளவும் வழங்கப்பட்ட

அளவும் சமமாக இருக்கும். தொடர்புடைய விலை என்பது சமநிலை விலை அல்லது சந்தை-அழிவு விலை, அளவு என்பது சமநிலை அளவு.



பிரச்சனை 1

15 டேபிள்கள் விலை ரூ. 500 ஆகவும், 25 டேபிள்கள் ரூ. 400 ஆகவும் விற்கப்படுகின்றன. டிமாண்ட் வளைவு நேரியல் என்று கருதி அதன் சமன்பாடு என்ன?

Let

X= தேவை Y= விலை

15	500
25	400

தேவை வளைவு புள்ளிகள் (15, 500) (25, 400)

X1, Y1 X2, Y2

சமன்பாடு சூத்திரம்

$\boldsymbol{y - y1 = \underline{y2 - y1}\ x - x1}$

$\boldsymbol{x2 - x1}$

$\boldsymbol{y - 500 = \underline{400 - 500}\quad x - 15}$

$\boldsymbol{25 - 15}$

$\boldsymbol{y - 500 =} \underline{-100}\boldsymbol{x - 15}$

10

$\boldsymbol{y - 500 = -10x - 15}$

$\boldsymbol{y - 500 = -10x + 150}$

$10x + y = 150 + 500$

$10x + y = 650$

தேவை வளைவு சமன்பாடு 10x+y=650 ஆகும்

பிரச்சனை 2

விலை ரூ.30 ஆக இருக்கும் போது, குறிப்பிட்ட வகை 100 பொம்மைகளும், ரூ.50,150 விலையில் அதே மாதிரியான பொம்மைகளும் சந்தையில் கிடைக்கும்.

Let

X= வழங்கல் Y= விலை

100 30

150 50

விநியோக வளைவு புள்ளிகள் (100, 30) (150, 50)

X1, Y1 X2, Y2

சமன்பாடு சூத்திரம்

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 30 = \frac{50 - 30}{150 - 100}(x - 100)$$

$$y - 30 = \frac{20}{50}(x - 100)$$

$$y - 30 = \frac{2}{5}(x - 100)$$

குறுக்கு பெருக்குதல்

5(y-30) = 2(x

100)

5y-150=2x-200

-2x+5y= -200+150

-2x+5y= -50 (அல்லது)

2x-5y = 50

விநியோக வளைவு சமன்பாடு 2x-5y=50 ஆகும்

பகுப்பாய்வு வடிவியல் சிக்கல்கள்

எடுத்துக்காட்டு 1:
அச்சின் (எக்ஸ்-அச்சு மற்றும் ஒய்-அச்சு) வெட்டும் புள்ளி என்ன அழைக்கப்படுகிறது?

தீர்வு:

அச்சின் குறுக்குவெட்டு புள்ளி (எக்ஸ்-அச்சு மற்றும் ஒய்-அச்சு) என்று அழைக்கப்படுகிறது**தோற்றம்**மற்றும் X மற்றும் Y-அச்சு இந்த கட்டத்தில் 0 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தைக் கண்டறியவும், அதாவது A மற்றும் B இன் ஆயத்தொலைவுகள் (5, -3) மற்றும் (2, 1).

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட, ஆயத்தொகுப்புகள்:

A = (5, -3) = (x_1, மற்றும்$_1$)

பி = (2, 1) = (x_2, மற்றும்$_2$)

இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரத்தைக் கண்டறியும் சூத்திரம் பின்வருமாறு:

தூரம், $d = \sqrt{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]}$

$d = \sqrt{[(2 - 5)^2 + (1 - (-3))^2]}$

$d = \sqrt{[(-3)^2 + (4)^2]}$

$d = \sqrt{[9 + 16]}$

$d = \sqrt{(25)}$

$d = 5$

எனவே, A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையிலான தூரம் 5 அலகுகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3:

புள்ளி A(5, -3) வழியாகச் செல்லும் கோட்டின் சாய்வைத் தீர்மானிக்கவும், அது y-

அச்சை 7 இல் சந்திக்கிறது.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்டால், புள்ளி A = (5, -3)

y அச்சில் கோடு குறுக்கிடினால், x என்பதை நாம் அறிவோம்$_2$= 0

எனவே, (x_2, மற்றும்$_2$) = (0, 7)

ஒரு கோட்டின் சாய்வைக் கண்டறிவதற்கான சூத்திரம்:

$m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$

இப்போது, மதிப்புகளை மாற்றவும்

$m = (7- (-3))/(0 - 5)$

$m = 10/-5$

$m = -2$

எனவே, கோட்டின் சாய்வு -2 ஆகும்.

அலகு – II - அணிகள்

அணிகள் வரையறை

அணிகள் என்பது வரிசைப்படுத்தப்பட்ட செவ்வக வரிசை எண்களைக் கொண்ட ஒரு செயல்பாடு ஆகும். அணிவரிசையில் உள்ள எண்கள் அணிகள் அல்லது அணிகளின் கூறுகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன. அணிகளில் உள்ள தனிமங்களின் கிடைமட்ட வரிசை வரிசைகள் என்றும், உறுப்புகளின் செங்குத்து வரிசை நெடுவரிசைகள் என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. ஒரு அணியில் m வரிசைகள் மற்றும் n நெடுவரிசைகள் இருந்தால், அது m x n வரிசையின் அணி எனப்படும்.

அறிமுகம்:

இங்கிலாந்தைச் சேர்ந்த சர் ஆர்தர் கேலி (1821-1895) 1858 ஆம் ஆண்டில் அணிகள் என்ற சொல்லை அறிமுகப்படுத்திய முதல் கணிதவியலாளர் ஆவார். ஆனால் இன்றைய நடைமுறையில் கணிதம் பெரும்பாலான நிகழ்வுகளில் பயன்படுத்தப்படுகிறது, இது ஒரே நேரத்தில் அதிக எண்ணிக்கையை குறிக்கும் குறியீடாக பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஒரு சிறிய மற்றும் வசதியான முறையில் சமன்பாடுகள். ஆபரேஷன்ஸ் ரிசர்ச், எகனாமிக்ஸ் மற்றும் சைக்காலஜி ஆகியவற்றில் அணிகள் தியரி அதன் பயன்பாடுகளைக் கொண்டுள்ளது. தவிர

அணிகளின் வரையறை

குறியீட்டால் குறிப்பிடப்படும் எண்கள் அல்லது செயல்பாடுகளின் செவ்வக வரிசை.

a_{11}	a_{12}	a_{1n}
a_{21} a_{m1}	a_{22} a_{m2}	a_{2n} a_{mn}

அணி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

இந்த வரிசையின் எண்கள் அல்லது செயல்பாடுகள் உறுப்புகள் என்று அழைக்கப்படுகின்றன, அவை உண்மையான அல்லது சிக்கலான எண்களாக இருக்கலாம், அதேசமயம் m மற்றும் n ஆகியவை நேர்மறை முழு எண்கள், இது வரிசைகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் நெடுவரிசைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது.

ஒரு அணியின் வரிசை

m வரிசைகள் மற்றும் n நெடுவரிசைகளைக் கொண்ட ஒரு அணி A ஆனது m ஆல் n (m x n) வரிசையைக் கொண்டதாகக் கூறப்படுகிறது. குறியீடாக A = (aij) m x n என்பது m x n வரிசையின் அணி. (aij) இல் 1 முதல் m வரையிலான முதல் சப்ஸ்கிரிப்ட் i வரிசைகளையும் (aij) இல் உள்ள இரண்டாவது சப்ஸ்கிரிப்ட் j in (aij) 1 முதல் n வரையிலான நெடுவரிசைகளையும் அடையாளம் காட்டுகிறது.

<u>உதாரணத்திற்கு</u>

A= 1 2 3

4 5 6 என்பது 2 × 3 வரிசையின் அணி ஆகும்

B = 1 2

2 4 என்பது 2 × 2 வரிசையின் அணி ஆகும்

C = $\sin\theta$ $\cos\theta$ வரிசை 2 × 2 இன் அணி ஆகும்
$2\cos\theta$ $\cos\theta$

2 3

D= 4 5 6 என்பது 3 × 3 வரிசையின் அணி ஆகும்

7 8 9

அணிகளின் வகைகள்

சதுரம் அணி

வரிசைகளின் எண்ணிக்கை நெடுவரிசைகளின் எண்ணிக்கைக்கு சமமாக இருக்கும்போது, அணி ஸ்கொயர்மேட்ரிக்ஸ் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

$$B = \begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{matrix}$$

2×2 வரிசையின் அணி ஆகும்

$$D = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

3×3 வரிசையின் அணி ஆகும்

வரிசை அணி

ஒரே ஒரு வரிசையைக் கொண்ட அணி வரிசை அணி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக $A= (2\ 0\ 1)$ என்பது வரிசை 1×3 இன் வரிசை அணி

$B=(1\ 0)$ என்பது ஒரு வரிசை அணி அல்லது வரிசை 1×2 ஆகும்

நெடுவரிசை அணி

ஒரே ஒரு நெடுவரிசையைக் கொண்ட அணி, நெடுவரிசை அணி எனப்படும். உதாரணத்திற்கு

$A = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$ என்பது வரிசை 3×1 இன் நெடுவரிசை அணி.

$B = \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$ வரிசை 2×1 இன் நெடுவரிசை அணி.

பூஜ்ஜியம் அல்லது பூஜ்ய அணி

அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியத்திற்கு சமமாக இருக்கும் ஒரு அணி

பூஜ்ஜியம் அல்லது பூஜ்ய மேட்ரிக்ஸ் என்று அழைக்கப்படுகிறது மற்றும் இது O ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.

$0 = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ என்பது 2×2 வரிசையின் பூஜ்ய அணி.

$0 = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ என்பது 3×2 வரிசையின் பூஜ்ய அணி

மூலைவிட்ட அணி

முக்கிய மூலைவிட்ட உறுப்புகளைத் தவிர மற்ற அனைத்து உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியமாக இருக்கும் ஒரு சதுர அணி, மூலைவிட்ட அணி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

உதாரணத்திற்கு

$A = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{matrix}$ வரிசை 2 மற்றும் ஒரு மூலைவிட்ட அணி 0.

$B = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{matrix}$ என்பது வரிசை 3 இன் மூலைவிட்ட அணி 0

ஸ்கேலர் அணி

K (ஒரு அளவிடல்) க்கு சமமான அனைத்து மூலைவிட்ட உறுப்புகளையும் கொண்ட ஒரு மூலைவிட்ட மேட்ரிக்ஸ் ஸ்கேலார் அணி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

உதாரணத்திற்கு

$A = \begin{matrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{matrix}$

என்பது ஆர்டர் 3 இன் ஸ்கேலார் மேட்ரிக்ஸ் மற்றும் ஸ்கேலார் K=2 இன் மதிப்பு

ஒரு அலகு அணி அல்லது அடையாள அணி

1 (ஒற்றுமை) க்கு சமமான ஒவ்வொரு மூலைவிட்ட உறுப்பையும் கொண்ட ஒரு அளவிடல் மேட்ரிக்ஸ் ஒரு அலகு அணி என்று அழைக்கப்படுகிறது மற்றும் இது I ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.

$I2 = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$ என்பது வரிசை 2 இன் அலகு அணி

$A = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ என்பது வரிசை 3 இன் அலகு அணி

ஒரு மேட்ரிக்ஸை ஸ்கேலரால் பெருக்குதல்

A = (aij) என்பது ஏதேனும் ஒரு வரிசையின் அணி மற்றும் K என்பது ஒரு ஸ்கேலார் எனில், A இன் ஸ்கேலார் பெருக்கல், ஸ்கேலார் k என வரையறுக்கப்படுகிறது.

KA= (Kaij) அனைத்திற்கும் i, j.

வேறு வார்த்தைகளில் கூறுவதானால், ஒரு அணி A ஐ ஸ்கேலர் K ஆல் பெருக்க, A இன் ஒவ்வொரு தனிமத்தையும் K ஆல் பெருக்கவும்.

ஒரு அணியின் எதிர்மறை

ஒரு அணி A = (aij)mxn இன் எதிர்மறையானது i, j அனைத்திற்கும் - A = (-aij)mxn ஆல் வரையறுக்கப்படுகிறது மற்றும் ஒவ்வொரு தனிமத்தின் அடையாளத்தையும் மாற்றுவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது.

உதாரணத்திற்கு

$A = \begin{matrix} 2 & -5 & 7 \\ 0 & 5 & 6 \end{matrix}$

என்றால்

$A = \begin{matrix} 2 & 5 & -7 \\ -0 & -5 & -6 \end{matrix}$

அணிகளின் சமத்துவம்

இரண்டு அணிகள் எப்போது சமமாக இருக்கும் என்று கூறப்படுகிறது

I. .அவர்கள் அதே ஒழுங்கு மற்றும்

II. தொடர்புடைய கூறுகள் சமம்.

அணிகளின் சேர்த்தல்

அணிகள் ஒரே வரிசையில் இருக்கும் போது மட்டுமே சாத்தியமாகும் (அதாவது, கூட்டலுக்கு இணக்கமானது). இரண்டு அணிகள் A மற்றும் B ஒரே வரிசையில் இருக்கும் போது, இரண்டு அணிகளிலும் தொடர்புடைய உறுப்புகளைச் சேர்ப்பதன் மூலம் அவற்றின் கூட்டுத்தொகை (A+B) பெறப்படும்.

அணி கூட்டலின் பண்புகள்

ஏ, பி, சி ஒரே வரிசையின் மெட்ரிக்குகளாக இருக்கட்டும்.

மெட்ரிக்ஸைச் சேர்ப்பது பின்வருவனவற்றைக் கடைப்பிடிக்கிறது

I. பரிமாற்ற சட்டம்: $A + B = B + A$

II. இணை சட்டம்: $A + (B + C)= (A + B) + C$

III. விநியோக சட்டம்: $K (A+B) = KA+KB$, k என்பது ஸ்கேலார்.

அணிகளின் கழித்தல்

மெட்ரிக்குகள் ஒரே வரிசையில் இருக்கும்போது மட்டுமே கழித்தல் சாத்தியமாகும். A மற்றும் B ஒரே வரிசையின் இரண்டு மெட்ரிக்குகளாக இருக்கட்டும். அணி A - B ஆனது A இன் தொடர்புடைய கூறுகளிலிருந்து B இன் கூறுகளைக் கழிப்பதன் மூலம் பெறப்படுகிறது.

அணிகளின் பெருக்கல்

முதல் மேட்ரிக்ஸின் நெடுவரிசைகளின் எண்ணிக்கை இரண்டாவது மேட்ரிக்ஸின் வரிசைகளின் எண்ணிக்கைக்கு சமமாக இருக்கும் போது மட்டுமே இரண்டு அணிகளின் பெருக்கல் சாத்தியமாகும் (அதாவது பெருக்கலுக்கு இணக்கமானது) A = (aij) ஒரு m x p அணியாக இருக்கட்டும், மேலும்

B = (bij) p x n மேட்ரிக்ஸில் இருக்கும்.

பின்னர் தயாரிப்பு AB ஆனது m x n வரிசையின் அணி C = (cij) ஆகும்,

அணி பெருக்கத்தின் பண்புகள்

I. .மேட்ரிக்ஸ் பெருக்கல் என்பது பொதுவாக A மற்றும் B ஆகிய இரண்டு மெட்ரிக்குகளுக்கு மாற்றத்தக்கது அல்ல.AB = BA.

II. மெட்ரிக்குகளின் பெருக்கல் துணையானது அதாவது,(AB) C = A(BC)

III. மேட்ரிக்ஸ் பெருக்கல் கூட்டலைப் பொறுத்த வரையில் விநியோகிக்கப்படுகிறது. அதாவது, A, B, C ஆகியவை முறையே mxn, n x k மற்றும் n x k வரிசையின் மெட்ரிக்குகள் என்றால், பின்னர்A(B+C) = AB + AC

IV. A என்பது n வரிசையின் சதுர அணியாகவும், I என்பது அதே வரிசையின் அலகு அணியாகவும் இருக்கட்டும். பிறகுAI = A = I A

V. பொருள்AB = O(பூஜ்ய அணி), A = 0 அல்லது B = 0 அல்லது இரண்டும் பூஜ்ஜியத்தைக் குறிக்காது.

அணிகளின் இடமாற்றம்

A = (aij) m x n வரிசையின் அணியாக இருக்கட்டும். A இன் இடமாற்றம், A ஆல் குறிக்கப்படுகிறது^{T}வரிசை n x m என்பது வரிசைகளை A இன் நெடுவரிசைகளாக மாற்றுவதன் மூலம் பெறப்படுகிறது.

உதாரணத்திற்கு

A = 1 2 5 எனில்

3 4 6 2×3

அணிகளின் இடமாற்றத்தின் பண்புகள்

ஏடி மற்றும் பிடி A மற்றும் B இன் மாற்றப்பட்ட மெட்ரிக்குகள் மற்றும்__ஒரு அளவுகோலாகும். பிறகு

a. $(A^T)^T = A$
b. $(A+B)^T = A^T + B^T$
c. $(aA)^T = aA^T$

d. $(AB)^T = B^T A^T$ (A மற்றும் B ஆகியவை பெருக்கத்திற்கு ஏற்றவை)

தீர்மானிப்பவர்கள்

மேட்ரிக்ஸ் இயற்கணிதம் பற்றிய ஆய்வில் ஒரு முக்கியமான பண்புக்கூறு, சதுர மேட்ரிக்ஸுக்குக் காரணமான தீர்மானிப்பான். மேட்ரிக்ஸ் இயற்கணிதம் ஆய்வில் நிர்ணயக் கோட்பாட்டின் அறிவு இன்றியமையாதது.

ஒவ்வொரு சதுர அணி A = (Alj) உடன் தொடர்புடைய நிர்ணயம் என்பது ஒரு அளவுகோல் மற்றும் குறிக்கப்படுகிறது ஒரு அணி ஒரு வரிசை மற்றும் எண் மதிப்பு இல்லை, ஆனால் ஒரு தீர்மானிக்கு எண் மதிப்பு உள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 1

	2	**0**	**4**
Evaluate	**5**	**−1**	1
	9	7	8

தீர்வு:

2 0 4 −1 1 5 15 -1

5 -1 1 = 2 - 0 + 4

9 7 8   7 8 9   8 9 7

$= 2(-1\times8-1\times7) – 0\ (5\times 8 - 9 \times 1)+ 4\ (5\times 7 - (-1) \times 9)$

$=2(-8-7) – 0\ (40-9) + 4\ (35+9)$

$=-30-0+176 = 146$

<u>தீர்மானிப்பவர்களின் பண்புகள்</u>

1.அதன் வரிசைகள் மற்றும் நெடுவரிசைகள் ஒன்றுக்கொன்று மாற்றப்படும்போது, தீர்மானிப்பவரின் மதிப்பு மாறாது.

2.ஒரு தீர்மானிப்பாளரின் ஏதேனும் இரண்டு வரிசைகள் (நெடுவரிசைகள்) ஒன்றுக்கொன்று மாற்றப்பட்டால், தீர்மானிப்பாளரின் மதிப்பு அடையாளத்தில் மட்டுமே மாறுகிறது.

3.தீர்மானிப்பதில் இரண்டு ஒத்த வரிசைகள் (நெடுவரிசைகள்) இருந்தால், தீர்மானிக்கும் பொருளின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.

4.ஒரு வரிசையிலோ அல்லது ஒரு (நெடுவரிசையில்) உள்ள அனைத்து உறுப்புகளும் ஒரு நிலையான k(k,) மூலம் பெருக்கப்பட்டால் 0) பின்னர் தீர்மானிக்கும் பொருளின் மதிப்பு k ஆல் பெருக்கப்படுகிறது.

5.எந்த ஒரு வரிசையின் (நெடுவரிசை) உறுப்புகளின் நிலையான பெருக்கமானது, ஒரு தீர்மானியில் உள்ள வேறு வரிசையின் (நெடுவரிசை) தொடர்புடைய உறுப்புகளுடன் சேர்க்கப்படும்போது, தீர்மானியின் மதிப்பு மாறாது.

6.ஒரு தீர்மானிப்பாளரின் ஒரு வரிசையின் (நெடுவரிசை) ஒவ்வொரு உறுப்பும் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சொற்களின் கூட்டுத்தொகையாக வெளிப்படுத்தப்பட்டால், தீர்மானிப்பானது ஒரே வரிசையின் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தீர்மானிப்பாளர்களின்

கூட்டுத்தொகையாக வெளிப்படுத்தப்படுகிறது.

7.ஒரு தீர்மானிப்பாளரின் ஏதேனும் இரண்டு வரிசைகள் அல்லது நெடுவரிசைகள் விகிதாசாரமாக இருந்தால், தீர்மானியின் மதிப்பு பூஜ்ஜியமாகும்.

ஒருமை அணி

ஒரு சதுர அணி A என்பது det என்றால் ஒருமை என்று கூறப்படுகிறது. A = 0,

இல்லையெனில் அது ஒருமை அல்லாத அணி.

உதாரணம் 2

Showthat $\begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{matrix}$

தீர்வு:

1 2 = (1× 4) – (2× 2)

2 4

= 4 - 4

= 0

அணி ஒருமை

எடுத்துக்காட்டு 3

$\begin{matrix} 2 & 5 \\ 9 & 10 \end{matrix}$ என்பது ஒருமை அல்லாத அணி என்பதைக் காட்டு

தீர்வு:

$\begin{matrix} 2 & 5 \\ 9 & 10 \end{matrix}$ = (2× 10) – (5× 9)

= 20 – 45

= -25 ≠ 0

கொடுக்கப்பட்ட அணி ஒருமை அல்ல

மேட்ரிக்ஸின் தலைகீழ்

மைனர்கள் மற்றும் ஒரு தீர்மானிப்பவரின் உறுப்புகளின் இணை காரணிகள்.

ஒரு தீர்மானிப்பான் A இன் ஒரு உறுப்பு aij இன் சிறியது Mi j ஆல் குறிக்கப்படுகிறது மற்றும் Alj நிகழும் வரிசை மற்றும் நெடுவரிசையை நீக்குவதன் மூலம் A இலிருந்து பெறப்படும் தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

மைனர் Mij உடன் ஒரு உறுப்பு aij இன் இணை காரணி Cij ஆல் குறிக்கப்படுகிறது மற்றும் வரையறுக்கப்படுகிறது

$Mij, if i+j is \ even$

$Cij=Mij, if i+j is \ odd$

Thus,Cofactorsaresignedminors

In the caseof $\begin{matrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{matrix}$ wehave

M11 = a22 ; M12 = a21 , M21 = a12 , M22 = a11Also

C11= a22, C12=-a21,C21=- a12 ,C22= a11

In the case of $\begin{matrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{matrix}$ wehave

M11 $=\begin{matrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{matrix}$ C11 $= \begin{matrix} a22 & a23 \\ a32 & a33 \end{matrix}$

M12 $=\begin{matrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{matrix}$ C12 $= \begin{matrix} a21 & a23 \\ a31 & a33 \end{matrix}$

M13 $=\begin{matrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{matrix}$ C13 $= \begin{matrix} a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{matrix}$

M21 $=\begin{matrix} a12 & a13 \\ a32 & a33 \end{matrix}$ C21 $= \begin{matrix} a12 & a13 \\ a32 & a33 \end{matrix}$

ஒரு சதுர அணி A இன் அனைத்து உறுப்புகளையும் அவற்றின் தொடர்புடைய இணை காரணிகளால் மாற்றுவதன் மூலம் அணியின் இடமாற்றம் கிடைத்தது | A | என்று அழைக்கப்படுகிறது**துணை**ஏ அல்லது**நியாயப்படுத்து**A இன் A மற்றும் Adj A ஆல் குறிக்கப்படுகிறது. இவ்வாறு, AdjA = A^டcNot

(i)LetA=$\boldsymbol{a}$ $\boldsymbol{b}$ thenAc = $\boldsymbol{d}$ $-\boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{d}$ $-\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{a}$

AdjA=A^T = $\boldsymbol{d} - \boldsymbol{b}$

c

$-\boldsymbol{c}$ $\boldsymbol{a}$

இவ்வாறு ஒரு 2 x 2 அணி a b இன் இணைப்பினை இவ்வாறு எழுதலாம்___-___

(ii)Adj I = I, Ist அலகு அணி.

(iii)A(AdjA) = (Adj A) A = | A | I

(iv)Adj (AB) = (Adj B) (Adj A)

(உள்)A என்பது வரிசை 2 இன் சதுர அணி எனில், |AdjA| = |ஏ| A என்பது வரிசை 3 இன் சதுர அணி எனில், |Adj A| = |ஏ|^2

எடுத்துக்காட்டு 1

அணி A = $\begin{matrix} 4 & -2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$ இன் இணைப்பினை எழுதவும்

தீர்வு

Adj A = $\begin{matrix} 4 & -2 \\ 3 & 4 \end{matrix}$

ஒருமை அல்லாத மேட்ரிக்ஸின் தலைகீழ்:

ஒருமை அல்லாத அணி A இன் தலைகீழ் அணி B ஆகும், அதாவது AB = BA = I. B ஆனது A இன் தலைகீழ் என அழைக்கப்படுகிறது மற்றும் A ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.$^{-1}$.

குறிப்பு

1.சதுரம் அல்லாத அணிக்கு தலைகீழ் இல்லை.

2.ஒரு சதுர அணி A இன் தலைகீழ் |A| என்ற போது மட்டுமே இருக்கும் ≠

0 அதாவது, A என்பது ஒரு ஒற்றை அணி என்றால் A^{-1}இல்லை.

3.B என்பது A இன் தலைகீழ் என்றால் A என்பது B இன் தலைகீழ்.

அது B = A^{-1}மற்றும் ஏ = பி$^{-1}$.

4. $AA^{-1}=I=A^{-1}A$

5.மேட்ரிக்ஸின் தலைகீழ், அது இருந்தால், அது தனித்துவமானது. அதாவது, எந்த அணியிலும் ஒன்றுக்கு மேல் தலைகீழ் இருக்க முடியாது.

6.அணி A இன் வரிசை$^{-1}$ஏ.

7 இல் இருந்ததைப் போலவே இருக்கும்.

8.$(AB)^{-1}$= பி$^{-1}$ஏ$^{-1}$, தலைகீழ் இருந்தால்.

9.ஏ^{2}= நான் குறிப்பிடுவது ஏ$^{-1}$= ஏ

10.AB = C என்றால்

11.A = CB^{-1}(ஆ) பி = ஏ$^{-1}$சி, தலைகீழ் இருந்தால்.

12.A(AdjA) = (AdjA)A = |A| என்று பார்த்தோம் நான்

∴ **ஏ**___/ (Adj A) =___/___(Adj A) A= I

இது அறிவுறுத்துகிறது, ஏ$^{-1}$= 1 / A (Adj A). அது ஏ$^{-1}$= 1 / ஏ ஏ$^{டி}$

c

(ஏ$^{-1}$)$^{-1}$= A, தலைகீழ் இருந்தால்.

சதுர மேட்ரிக்ஸின் நிர்ணயிப்பவரின் மதிப்பு பூஜ்ஜியத்திற்கு சமமாக இல்லாவிட்டால், அதுஒரு அல்லாத ஒருமை அணி.

இது ஒருமை அல்லாத அணி என்றால், தலைகீழ் உள்ளது

மெட்ரிக்குகளின் வகைகள்

வரிசை மற்றும் கூறுகளைப் பொறுத்து, மெட்ரிக்குகள் வகைப்படுத்தப்படுகின்றன:

- ·நெடுவரிசை அணி

- ·வரிசை அணி
- ·சதுர அணி
- ·மூலைவிட்ட அணி
- ·ஸ்கேலார் மேட்ரிக்ஸ்
- ·முற்றொருமை
- ·ஜீரோ மேட்ரிக்ஸ்

வகை அணி	**விளக்கம் மற்றும் எடுத்துக்காட்டு**
நெடுவரிசை அணி	நெடுவரிசை அணி என்பது m × 1 அணி ஆகும், இது m தனிமங்களின் ஒற்றை நெடுவரிசையைக் கொண்டுள்ளது. இது நெடுவரிசை திசையன் என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டு: [41 – 5]
வரிசை அணி	ஒரு வரிசை அணி என்பது 1 × m அணி ஆகும், இது m தனிமங்களின் ஒற்றை வரிசையைக் கொண்டுள்ளது. இது ஒரு வரிசை திசையன் என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டு: [2 – 10]
சதுரம் அணி	சம எண்ணிக்கையிலான வரிசைகள் மற்றும் நெடுவரிசைகளைக் கொண்ட அணி. இது m × m ஆக வெளிப்படுத்தப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டு: வரிசை 2 இன் சதுர அணி [18 – 31]. வரிசை 3 இன் சதுர அணி [1 – 1 – 4812031].
மூலைவிட்டம் அணி	ஒரு சதுர அணி, அதன் மூலைவிட்டப் பகுதியில் பூஜ்ஜியமற்ற உறுப்புகள் மேல் இடமிருந்து கீழ் வலது அல்லது நேர்மாறாக இயங்கும். எடுத்துக்காட்டு: [9000 – 40006]

ஸ்கேலார் மேட்ரிக்ஸ்	ஸ்கேலார் மேட்ரிக்ஸ் என்பது ஒரு சதுர அணி, இது அதன் அனைத்து மூலைவிட்ட உறுப்புகளையும் சமமாகவும் மற்றும் அனைத்து ஆஃப்-மூலைவிட்ட உறுப்புகளையும் பூஜ்ஜியமாகவும் கொண்டுள்ளது. எடுத்துக்காட்டு: [140001400014]
அடையாளம் அணி	அனைத்து முக்கிய மூலைவிட்ட கூறுகளையும் 1 ஆகவும், மூலைவிட்டமற்ற உறுப்புகள் பூஜ்ஜியங்களாகவும் கொண்ட ஒரு சதுர அணி. உதாரணமாக: வரிசை 2 இன் அடையாள (அலகு) அணி [1001] ஆகும். ஆர்டர் 3 இன் அடையாள அணி [100010001] .
ஜீரோ மேட்ரிக்ஸ்அனைத்து உள்ளீடுகளும் பூஜ்ஜியமாக இருக்கும் அணி. இது பூஜ்ய அணி என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டு: [000000]	

மெட்ரிக்குகளின் சமத்துவம்

இரண்டு மெட்ரிக்குகள் சமமாக இருந்தால்-
(i) இரண்டு மெட்ரிக்குகளின் வரிசை ஒன்றுதான்

(ii) ஒரு மேட்ரிக்ஸின் ஒவ்வொரு உறுப்பும் மற்ற மேட்ரிக்ஸின் தொடர்புடைய உறுப்புக்கு சமம்

மெட்ரிக்குகளில் செயல்பாடுகள்

வகுப்பு 12 மெட்ரிக்குகளின் அத்தியாயம் 3 இல், மெட்ரிக்குகளின் சில செயல்பாடுகள் விவாதிக்கப்படுகின்றன, அதாவது, மெட்ரிக்ஸைக் கூட்டுதல், ஒரு மேட்ரிக்ஸை ஸ்கேலரால் பெருக்குதல், வேறுபாடு மற்றும் மெட்ரிக்குகளின் பெருக்கல்.

மேட்ரிக்ஸின் இடமாற்றம்

A என்றால் = $[a_{ij}]$ ஒரு m × n அணி, பின்னர் A இன் வரிசைகள் மற்றும் நெடுவரிசைகளை மாற்றுவதன் மூலம் பெறப்பட்ட அணி A இன் இடமாற்றம் என்று அழைக்கப்படுகிறது மற்றும் A′ அல்லது (A ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.[டி])

வேறு வார்த்தைகளில் கூறுவதானால், A = $[a_{ij}]$ m × n , பின்னர் A′ = [a$_{\text{இருந்து}}$] என் × மீ.

சமச்சீர் மற்றும் வளைவு சமச்சீர் மெட்ரிக்குகள்

ஒரு சதுர அணி A = $[a_{ij}]$ A இன் இடமாற்றம் A க்கு சமமாக இருந்தால் சமச்சீர் என்று கூறப்படுகிறது, அதாவது $[a_{ij}]$ = [அ$_{\text{இருந்து}}$] i மற்றும் j இன் சாத்தியமான அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்.

ஒரு சதுர அணி A = $[a_{ij}]$ என்பது A′ = – A என்றால் வளைவு-சமச்சீர் அணி, அது a$_{\text{இருந்து}}$= – ஏ$_{ij}$i மற்றும் j இன் சாத்தியமான அனைத்து மதிப்புகளுக்கும். மேலும், i = j ஐ மாற்றினால், நம்மிடம் a உள்ளது$_{ii}$= – ஏ$_{ii}$இதனால், $2a_{ii}$= 0 அல்லது ஏ$_{ii}$அனைத்து ஐகளுக்கும் = 0. எனவே, ஒரு வளைவு-சமச்சீர் மேட்ரிக்ஸின் அனைத்து மூலைவிட்ட உறுப்புகளும் பூஜ்ஜியமாகும்.

சமச்சீர் மற்றும் வளைவு-சமச்சீர் அணியை விரிவாகப் புரிந்து கொள்ள,இங்கே வருகை.

மேட்ரிக்ஸின் அடிப்படை செயல்பாடு (மாற்றம்).

ஒரு மேட்ரிக்ஸில் ஆறு செயல்பாடுகள் (உருமாற்றங்கள்) உள்ளன, அவற்றில் மூன்று வரிசைகள் மற்றும் மூன்று நெடுவரிசைகளால் ஏற்படுகின்றன, அவை அடிப்படை செயல்பாடுகள் அல்லது உருமாற்றங்கள் என அழைக்கப்படுகின்றன.

1. ஏதேனும் இரண்டு வரிசைகள் அல்லது இரண்டு நெடுவரிசைகளின் பரிமாற்றம்.
2. பூஜ்ஜியமற்ற எண்ணால் எந்த வரிசை அல்லது நெடுவரிசையின் உறுப்புகளின் பெருக்கல். 3. எந்த ஒரு வரிசை அல்லது நெடுவரிசையின் உறுப்புகளுடன் சேர்த்தல், வேறு எந்த வரிசை அல்லது நெடுவரிசையின்

தொடர்புடைய கூறுகளும் பூஜ்ஜியமற்ற எண்ணால் பெருக்கப்படும்.

தலைகீழான மெட்ரிக்குகள்

m வரிசையின் ஒரு சதுர அணி என்று வைத்துக்கொள்வோம், அதே வரிசையில் m இன் மற்றொரு சதுர அணி B இருந்தால், AB = BA = I, பின்னர் B ஆனது A இன் தலைகீழ் அணி என்று அழைக்கப்படுகிறது, மேலும் அது A ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.$^{-1}$. மேலும், அணி A இங்கு தலைகீழான அணி என்று கூறப்படுகிறது.

<u>மெட்ரிக்குகள் மற்றும் தீர்மானிப்பான்களின் பயன்பாடுகள்</u>

(i) **மேட்ரிக்ஸ் தலைகீழ் முறை**

உதாரணமாக

மேட்ரிக்ஸ் தலைகீழ் முறையைப் பயன்படுத்தி, பின்வரும் நேரியல் சமன்பாடுகளின் அமைப்பைத் தீர்க்கவும்:

5*எக்ஸ்*+ 2*மற்றும்*= 3, 3*எக்ஸ்*+ 2*மற்றும்*= 5

தீர்வு

அணி வடிவம் AX = B , எங்கே $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\3 & 2\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}$.

நாம் |A| = $\begin{vmatrix}5 & 2\\3 & 2\end{vmatrix}$ = 10 - 6= 4 ≠ 0. எனவே, A − 1 உள்ளது மற்றும் A − 1 $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -2\\-3 & 5\end{bmatrix}$.

பிறகு, X = A − 1B சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தினால், நமக்குக் கிடைக்கும்

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & -2\\-3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}6-10\\-9+25\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-4\\16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-4}{4}\\\frac{16}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}.$$

எனவே தீர்வு (x = -1, y = 4).

உதாரணமாக

மேட்ரிக்ஸ் தலைகீழ் முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் சமன்பாடுகளின்

அமைப்பைத் தீர்க்கவும்:

$2x1 + 3x2 + 3x3 = 5$,

$x1 – 2x2 + x3 = -4$,

$3x1 – x2 – 2x3 = 3$

தீர்வு

அணி வடிவம் AX = B, எங்கே

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

We find $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2(4+1)-3(-2-3)+3(-1+6) = 10+15+15 = 40 \neq 0$.

So, A^{-1} exists and

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} +(4+1) & -(-2-3) & +(-1+6) \\ -(-6+3) & +(-4-9) & -(-2-9) \\ +(3+6) & -(2-3) & +(-4-3) \end{bmatrix}^T = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

Then, applying $X = A^{-1}B$, we get

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 25-12+27 \\ 25+52+3 \\ 25-44-21 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 40 \\ 80 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

எனவே, தீர்வு ($x1 = 1, x2 = 2, x3 = -1$) .

உதாரணமாக

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} \text{ and } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

என்றால், AB மற்றும் BA தயாரிப்புகளைக் கண்டறிந்து x - y + z = 4, x – 2y – 2z = 9, 2x + y +3z =1 என்ற சமன்பாடுகளின் அமைப்பைத் தீர்க்கவும்.

தீர்வு

$$\text{We find } AB=\begin{bmatrix}-4&4&4\\-7&1&3\\5&-3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&-2&-2\\2&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4+4+8&4-8+4&-4-8+12\\-7+1+6&7-2+3&-7-2+9\\5-3-2&-5+6-1&5+6-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&0&0\\0&8&0\\0&0&8\end{bmatrix}=8I_3$$

$$\text{and } BA=\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&-2&-2\\2&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&4&4\\-7&1&3\\5&-3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4+7+5&4-1-3&4-3-1\\-4+14-10&4-2+6&4-6+2\\-8-7+15&8+1-9&8+3-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&0&0\\0&8&0\\0&0&8\end{bmatrix}=8I_3.$$

So, we get $AB=BA=8I_3$. That is, $\left(\frac{1}{8}A\right)B=B\left(\frac{1}{8}A\right)=I_3$. Hence, $B^{-1}=\frac{1}{8}A$.

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அமைப்பை மேட்ரிக்ஸ் வடிவத்தில் எழுதுவதன் மூலம், நாம் பெறுகிறோம்

$$\begin{bmatrix}1&-1&1\\1&-2&-2\\2&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\9\\1\end{bmatrix}.\ \text{That is, } B\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\9\\1\end{bmatrix}.$$

$$\text{So, }\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=B^{-1}\begin{bmatrix}4\\9\\1\end{bmatrix}=\left(\frac{1}{8}A\right)\begin{bmatrix}4\\9\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-4&4&4\\-7&1&3\\5&-3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\9\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-16+36+4\\-28+9+3\\20-27-1\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}24\\-16\\-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\\-1\end{bmatrix}$$

எனவே, தீர்வு ($x = 3, y = -2, z = -1$).

(ii) **க்ரேமர் விதி**

உதாரணமாக

க்ரேமரின் விதியின்படி, சமன்பாடுகளின் அமைப்பைத் தீர்க்கவும்
$x1 - x2 = 3,\ 2x1 + 3x2 + 4x3 = 17,\ x2 + 2x3 = 7.$

தீர்வு

முதலில் நாம் தீர்மானிப்பவர்களை மதிப்பீடு செய்கிறோம்

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&0\\2&3&4\\0&1&2\end{vmatrix}=6\neq0,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}3&-1&0\\17&3&4\\7&1&2\end{vmatrix}=12,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1&3&0\\2&17&4\\0&7&2\end{vmatrix}=-6,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1&-1&3\\2&3&17\\0&1&7\end{vmatrix}=24.$$

By Cramer's rule, we get $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{12}{6}=2,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-6}{6}=-1,\ x_3=\frac{24}{6}=4.$

எனவே, தீர்வு ($x1 = 2, x2 = -1, x3 = 4$).

உதாரணமாக

டி20 போட்டியில், கடைசி ஓவரில் 1 பந்து மீதம் உள்ள நிலையில், சென்னை சூப்பர் கிங்ஸ் வெற்றிக்கு 6 ரன்கள் மட்டுமே தேவைப்பட்டது. கடைசி பந்து வீசப்பட்டது மற்றும் கிரீஸில் இருந்த பேட்ஸ்மேன் அதை உயரத்தில் அடித்தார். பந்து ஒரு செங்குத்து விமானத்தில் ஒரு பாதையில் சென்றது மற்றும் பாதையின் சமன்பாடு *மற்றும்* = *கோடாரி*2 $+ bx + c$ ஒரு பொறுத்து xy- ஒருங்கிணைப்பு அமைப்பு செங்குத்து விமானம் மற்றும் பந்து (10,8), (20,16), (30,18) புள்ளிகள் வழியாக கடந்து சென்றது, நீங்கள் முடிக்க முடியுமா? இந்தப் போட்டியில் சென்னை சூப்பர் கிங்ஸ் வென்றதா?

உங்கள் பதிலை நியாயப்படுத்துங்கள். (அனைத்து தூரங்களும் மீட்டர் மற்றும் பாதையின் விமானத்தின் சந்திப்பு புள்ளியில் அளவிடப்படுகின்றன தொலைதூர எல்லைக் கோடு (70, 0) ஆகும்.

தீர்வு

பாதை $= ax2 + bx + c$ புள்ளிகள் (10,8), (20,16), (40, 22) வழியாக செல்கிறது. எனவே, நாங்கள் சமன்பாடுகள் 100 அமைப்பைப் $100a + 10b + c = 8, 400a + 20b + c = 16, 1600a + 40b + c = 22.$ க்ரேமர்ஸ் விண்ணப்பிக்க விதி, நாங்கள் கண்டுபிடிக்கிறோம்

$$\Delta = \begin{vmatrix} 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \\ 1600 & 40 & 1 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1000[-2 + 12 - 16] = -6000,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 16 & 20 & 1 \\ 22 & 40 & 1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 11 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 20[-8 + 3 + 10] = 100,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 100 & 8 & 1 \\ 400 & 16 & 1 \\ 1600 & 22 & 1 \end{vmatrix} = 200 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 16 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 200[-3 + 48 - 84] = -7800,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 100 & 10 & 8 \\ 400 & 20 & 16 \\ 1600 & 40 & 22 \end{vmatrix} = 2000 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \\ 16 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 2000[-10 + 84 - 64] = 20000.$$

By Cramer's rule, we get $a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{60}, b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7800}{6000} = \frac{78}{60} = \frac{13}{10}, c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{20000}{6000} = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}.$

So, the equation of the path is $y = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{13}{10}x - \frac{10}{3}.$

எப்பொழுது x= 70, நாங்கள் பெறுகிறோம் y= 6.

எனவே, பந்து எல்லைக் கோட்டிற்கு மேல் 6 மீட்டர் உயரத்திற்கு சென்றது, மேலும் ஒரு பீல்டர் மட்டும் நிற்பது சாத்தியமில்லை எல்லைக் கோட்டிற்கு முன் குதித்து பந்தை பிடிக்க வேண்டும்.

இதனால் பந்து சூப்பர் சிக்ஸருக்கு சென்றதால், சென்னை சூப்பர் கிங்ஸ் அணி வெற்றி பெற்றது

(iii) **காஸியன் எலிமினேஷன் முறை**

உதாரணமாக

காஸியன் எலிமினேஷன் முறை மூலம் பின்வரும் நேரியல் சமன்பாடுகளின் அமைப்பைத் தீர்க்கவும்:
$4x + 3y + 6z = 25$, $x + 5y + 7z = 13$, $2x + 9y + z = 1$.

தீர்வு

ஆக்மென்ட்டட் மேட்ரிக்ஸை எச்செலான் வடிவத்திற்கு மாற்றுவது, நாம் பெறுகிறோம்

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 25 \\ 1 & 5 & 7 & 13 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 4 & 3 & 6 & 25 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & -17 & -22 & -27 \\ 0 & -1 & -13 & -25 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 \div (-1)]{R_2 \to R_2 \div (-1),} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 17 & 22 & 27 \\ 0 & 1 & 13 & 25 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to 17R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 17 & 22 & 27 \\ 0 & 0 & 199 & 398 \end{array}\right].$$

சமமான அமைப்பு echelon படிவத்தைப் பயன்படுத்தி எழுதப்படுகிறது:

$x + 5y + 7z = 13$, ... (1)

$17y + 22z = 27$, ... (2)

$199z = 398$ . ... (3)

From (3), we get $z = \frac{398}{199} = 2$.

Substituting $z = 2$ in (2), we get $y = \frac{27 - 22 \times 2}{17} = \frac{-17}{17} = -1$.

$z = 2$, $y = -1$ in (1), நாம் $x = 13 - 5 \times (-1) - 7 \times 2 = 4$ ஐப் பெறுகிறோம்.

எனவே, தீர்வு ($x = 4$, $y = -1$, $z = 2$).

குறிப்பு.கடைசி சமன்பாட்டிலிருந்து முதல் சமன்பாட்டிற்கு செல்லும் மேலே உள்ள முறை தி எனப்படும்**மீண்டும் முறை மாற்று**.

உதாரணமாக

மேல்நோக்கிய வேகம்*உள்ளே*(*டி*t நேரத்தில் ஒரு ராக்கெட்டின் தோராயமாக v(t) = at2 + bt + c, 0 ≤ t ≤ 100 இங்கு a, b, மற்றும் c மாறிலிகள். முறையே t = 3, t = 6 , மற்றும் t = 9 வினாடிகளின் வேகம் என்று கண்டறியப்பட்டுள்ளது, வினாடிக்கு முறையே 64, 133 மற்றும் 208 மைல்கள். t = 15 வினாடிகளில் வேகத்தைக் கண்டறியவும். (காசியனைப் பயன்படுத்தவும் நீக்கும் முறை.)

தீர்வு

$v(3) = 64$, $v(6) = 133$ and $v(9) = 208$, நாம் பின்வரும் நேரியல் சமன்பாடுகளின்

அமைப்பைப் பெறுகிறோம்9a + 3b + c = 64 ,

36a + 6b + c = 133,

81a + 9b + c = 208 .

மேலே உள்ள நேரியல் சமன்பாடுகளின் அமைப்பை காசியன் நீக்குதல் முறை மூலம் தீர்க்கிறோம்.

எலிமெண்டரி வரிசை செயல்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி, ஆக்மென்ட் மேட்ரிக்ஸை சமமான வரிசை-எச்செலான் வடிவத்திற்குக் குறைப்பது, நாங்கள் பெறு

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64 \\ 36 & 6 & 1 & 133 \\ 81 & 9 & 1 & 208 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 4R_1, R_3 \to R_3 - 9R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64 \\ 0 & -6 & -3 & -123 \\ 0 & -18 & -8 & -368 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 \div (-3), R_3 \to R_3 \div (-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64 \\ 0 & 2 & 1 & 41 \\ 0 & 9 & 4 & 184 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64 \\ 0 & 2 & 1 & 41 \\ 0 & 18 & 8 & 368 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 9R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64 \\ 0 & 2 & 1 & 41 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to (-1)R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64 \\ 0 & 2 & 1 & 41 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

row-echelon matrix இலிருந்து சமமான சமன்பாடுகளை எழுதினால், நாம் பெறுகிறோம்

9a + 3b + c = 64, 2b + c = 41, c= 1.

பின் மாற்று மூலம், நாம் பெறுகிறோம்

we get $c = 1,\ b = \dfrac{(41-c)}{2} = \dfrac{(41-1)}{2} = 20,\ a = \dfrac{64-3b-c}{9} = \dfrac{64-60-1}{9} = \dfrac{1}{3}.$

எனவே, நாம் v (t) = 1/3 t2 + 20t + 1 ஐப் பெறுகிறோம்.

எனவே,*உள்ளே*(15) = 1/3 (225) + 20(15) + 1 = 75 + 300 + 1 = 376

<u>அணி: ஒரே மாதிரியாக இல்லாத நேரியல் சமன்பாடுகள்</u>

மெட்ரிக்குகளின் பயன்பாடுகள்: ரேங்க் முறை மூலம் நேரியல் சமன்பாடுகளின் அமைப்பின் நிலைத்தன்மை

இரண்டாவது முந்தைய பிரிவில், நேரியல் சமன்பாட்டின் அமைப்பின் நிலைத்தன்மையை ஏற்கனவே வரையறுத்துள்ளோம். இந்த பிரிவில், தரவரிசை முறையைப் பயன்படுத்தி நாங்கள் அதை ஆராய்வோம். ஆதாரம் இல்லாமல் பின்வரும் தேற்றத்தை நாங்கள் கூறுகிறோம்:

தேற்றம் 1.14 (Rouché - Capelli Theorem)

என அணி வடிவத்தில் எழுதப்பட்ட நேரியல் சமன்பாடுகளின் அமைப்பு*AX*=*பி*, தரவரிசையில் இருந்தால் மட்டுமே சீரானது குணகம் மேட்ரிக்ஸ் ஆக்மென்ட் மேட்ரிக்ஸின் தரத்திற்கு சமம்; அது,*ஆர்*(*ஏ*) =*ஆர்*([[*ஏ*|*பி*]).

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளில் நாம் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துகிறோம்.

ஒரே மாதிரியான நேரியல் சமன்பாடுகள்
உதாரணமாக

பின்வரும் நேரியல் சமன்பாடுகளின் நிலைத்தன்மையை சோதித்து முடிந்தால்

தீர்க்கவும்:

$x + 2y - z = 3,\ 3x - y + 2z = 1,\ x - 2y + 3z = 3,\ x - y + z + 1 = 0$.

தீர்வு

இங்கு தெரியாத எண் 3 ஆகும்.

அணி வடிவம் AX = B, எங்கே

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

The augmented matrix is $[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right].$

காஸியன் எலிமினேஷன் முறையைப் பயன்படுத்துதல் [A | B], நாங்கள் பெறுகிறோம்

$$[A \mid B] \xrightarrow[\substack{R_3 \to R_3 - R_1, \\ R_4 \to R_4 - R_1,}]{R_2 \to R_2 - 3R_1,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 5 & -8 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_3 \to (-1)R_3, \\ R_4 \to (-1)R_4}]{R_2 \to (-1)R_2,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4 \to 7R_4 - 3R_2]{R_3 \to 7R_3 - 4R_2,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 \div (-8)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

[A | இன் வரிசை-எச்சிலோன் வடிவத்தில் மூன்று பூஜ்ஜியமற்ற வரிசைகள் உள்ளன B].எனவே, ρ ([A | B]) . = 3 எனவே, A இன் வரிசை-எச்சிலோன் வடிவம்

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. அதில் பூஜ்ஜியமற்ற மூன்று வரிசைகள் உள்ளன. எனவே ρ(A) = 3.

எனவே, ρ(A) = ρ([A | B]) = 3.

எச்செலோன் வடிவத்தில் இருந்து, சமன்பாடுகளின் சமமான அமைப்பை எழுதுகிறோம்

x + 2y –z =3, 7y-5z = 8, z=4, 0=0.

கடைசி சமன்பாடு 0 = 0 அர்த்தமுள்ளதாக இருக்கிறது. பின் மாற்று முறை மூலம், நாம் பெறுகிறோம்

z = 4

7y - 20 = 8 ⇒ y = 4,

x = 3 - 8 + 4 ⇒ x = -1.

எனவே, தீர்வு (x = -1, y = 4, z = 4) .(A என்பது சதுர அணி அல்ல என்பதைக் கவனத்தில்

கொள்ளவும்.)

இங்கே கொடுக்கப்பட்ட அமைப்பு சீரானது மற்றும் தீர்வு தனித்துவமானது.

உதாரணமாக
பின்வரும் நேரியல் சமன்பாடுகளின் நிலைத்தன்மையை சோதித்து முடிந்தால் தீர்க்கவும்:

$4x - 2y + 6z = 8,\ x + y - 3z = -1,\ 15x - 3y + 9z = 21.$

தீர்வு

இங்கு தெரியாத எண் 3 ஆகும்.

அமைப்பின் மேட்ரிக்ஸ் வடிவம் *AX= பி*, எங்கே

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 15 & -3 & 9 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

ஆக்மென்டட் மேட்ரிக்ஸில் அடிப்படை வரிசை செயல்பாடுகளைப் பயன்படுத்துதல்[A|B], நாங்கள் பெறுகிறோம்

$$[A\,|\,B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 15 & -3 & 9 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & 6 & 8 \\ 15 & -3 & 9 & 21 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 15R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -6 & 18 & 12 \\ 0 & -18 & 54 & 36 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 \div (-18)]{R_2 \to R_2 \div (-6),} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

அதனால், $\rho(A) = \rho([A\,|\,B]) = 2 < 3$. எச்செலோன் படிவத்திலிருந்து, சமமான சமன்பாடுகளைப் பெறுகிறோம் $x + y - 3z = -1,\ y - 3z = -2,\ 0 = 0$.

சமமான அமைப்பு இரண்டு அற்பமான சமன்பாடுகள் மற்றும் மூன்று அறியப்படாதவைகளைக் கொண்டுள்ளது. எனவே, தெரியாத ஒன்று இருக்க வேண்டும் மற்ற இரண்டு அறியப்படாதவற்றுக்கு இரண்டு சமன்பாடுகளைப் பெறுவதற்காக எங்கள் விருப்பப்படி சரி செய்யப்பட்டது. சரி செய்கிறோம் *உடன்* தன்னிச்சையாக ஒரு உண்மையான எண் *டி*, மற்றும் நாம் $y = 3t - 2,\ x = -1 - (3t - 2) + 3t = 1$. எனவே, தீர்வு $(x = 1, y = 3t - 2, z = t)$, எங்கே *டி* உண்மையானது . மேலே உள்ள தீர்வுத் தொகுப்பு தீர்வுகளின் ஒரு அளவுரு குடும்பமாகும்.

இங்கே, கொடுக்கப்பட்ட அமைப்பு சீரானது மற்றும் ஒரு அளவுரு குடும்பத்தை உருவாக்கும் எண்ணற்ற பல தீர்வுகளைக் கொண்டுள்ளது தீர்வுகள்.

குறிப்பு

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டில், சதுர அணி*ஏ*ஒருமை மற்றும் மேட்ரிக்ஸ் தலைகீழ் முறை இருக்க முடியாது முறைமை சமன்பாடுகளை தீர்க்க பயன்படுத்தப்பட்டது. இருப்பினும், காசியன் நீக்குதல் முறை பொருந்தும் மற்றும் எங்களால் முடியும் அமைப்பு சீரானதா இல்லையா என்பதை முடிவு செய்யுங்கள். அடுத்த உதாரணமும் காசியனின் மேலாதிக்கத்தை உறுதிப்படுத்துகிறது மற்ற முறைகளை விட நீக்குதல் முறை.

உதாரணமாக

பின்வரும் நேரியல் சமன்பாடுகளின் நிலைத்தன்மையை சோதித்து முடிந்தால் தீர்க்கவும்: $x - y + z = -9,\ 2x - 2y + 2z = -18,\ 3x - 3y + 3z + 27 = 0.$

தீர்வு

இங்கு தெரியாத எண் 3 ஆகும்.

அமைப்பின் மேட்ரிக்ஸ் வடிவம் $AX = B$, எங்கே

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -9 \\ -18 \\ -27 \end{bmatrix}.$$

ஆக்மென்டட் மேட்ரிக்ஸில் அடிப்படை வரிசை செயல்பாடுகளைப் பயன்படுத்துதல் $[A|B]$, நாங்கள் பெறுகிறோம்

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & -2 & 2 & -18 \\ 3 & -3 & 3 & -27 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

அதனால், $\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 1 < 3.$

எச்செலோன் வடிவத்தில் இருந்து, நாம் சமமான சமன்பாடுகளைப் பெறுகிறோம் $x - y + z = -9,\ 0 = 0, 0 = 0.$

சமமான அமைப்பில் ஒரு அற்பமான சமன்பாடு மற்றும் மூன்று அறியப்படாத சமன்பாடுகள் உள்ளன.

எடுத்துக்கொள்வது $y = s, z = t$ தன்னிச்சையாக, நாம் $x - s + t = -9;$ or $x = -9 + s - t.$

எனவே, தீர்வு $(x = -9 + s - t,\ y = s,\ z = t)$, எங்கே*கள்*மற்றும்*டி*அளவுருக்கள் ஆகும்.

மேலே உள்ள தீர்வுத் தொகுப்பானது தீர்வுகளின் இரண்டு அளவுருக் குடும்பமாகும்.

இங்கே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அமைப்பு சீரானது மற்றும் இரண்டை உருவாக்கும் எண்ணற்ற பல தீர்வுகளைக் கொண்டுள்ளது தீர்வுகளின் அளவுரு குடும்பம்.

உதாரணமாக

நேரியல் சமன்பாடுகளின் பின்வரும் அமைப்பின் நிலைத்தன்மையை சோதிக்கவும்
$x - y + z = -9,\ 2x - y + z = 4,\ 3x - y + z = 6,\ 4x - y + 2z = 7.$

தீர்வு

இங்கு தெரியாதவர்களின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும்.

சமன்பாடுகளின் அமைப்பின் மேட்ரிக்ஸ் வடிவம் *AX=B,* எங்கே

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ஆக்மென்ட்டட் மேட்ரிக்ஸில் [A|B] அடிப்படை வரிசை செயல்பாடுகளைப் பயன்படுத்தினால், நாங்கள் பெறுகிறோம்

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1, \\ R_3 \to R_3 - 3R_1, \\ R_4 \to R_4 - 4R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 22 \\ 0 & 2 & -2 & 33 \\ 0 & 3 & -2 & 43 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \to R_3 - 2R_2, \\ R_4 \to R_4 - 3R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -23 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right]$$

எனவே, ρ (A) = 3 மற்றும் ρ ([A | B]) = 4. எனவே ρ (A) ≠ ρ ([A | B]).

எச்செலன் படிவத்தைப் பயன்படுத்தி சமன்பாடுகளின் சமமான அமைப்பை எழுதினால், நமக்குக் கிடைக்கும்
$x - y + z = -9, y - z = 22, z = -23, 0 = -11.$

கடைசி சமன்பாடு ஒரு முரண்பாடு.

எனவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடுகளின் அமைப்பு சீரற்றது மற்றும் தீர்வு இல்லை. Rouché -Capelli தேற்றம் மூலம், பின்வரும் விதி எங்களிடம் உள்ளது:

- இருந்தால் *n* சமன்பாடுகளின் அமைப்பில் தெரியாதவை மற்றும் $\rho(A) = \rho([A|B]) = n,$ பிறகு அமைப்பு *AX=B,* சீரானது மற்றும் ஒரு தனித்துவமான தீர்வு உள்ளது.

- இருந்தால் *n* அமைப்பு தெரியாதவை *AX=பி,* மற்றும் $\rho(A) = \rho([A|B]) = n - k, k \neq 0$ பின்னர் அமைப்பு சீரானது மற்றும் எண்ணற்ற பல தீர்வுகளைக் கொண்டுள்ளது மற்றும் இந்த தீர்வுகள் a உருவாகின்றன *கே* -அளவுரு குடும்பம். குறிப்பாக, சமன்பாடுகளின் அமைப்பில் 3 தெரியாதவை இருந்தால் மற்றும் $\rho(A) = \rho([A|B]) = 2,$ பின்னர் கணினி எண்ணற்ற பல தீர்வுகளைக் கொண்டுள்ளது மற்றும் இந்த தீர்வுகள் ஒன்றை

உருவாக்குகின்றன அளவுரு குடும்பம். அதே முறையில், ஒரு அமைப்பில் 3 தெரியாதவை இருந்தால் சமன்பாடுகள் மற்றும் $\rho(A)=\rho([A|B])=1$, பின்னர் கணினியில் எண்ணற்ற பல தீர்வுகள் மற்றும் இந்த தீர்வுகள் உள்ளன இரண்டு அளவுரு குடும்பத்தை உருவாக்குகிறது.

· என்றால் $\rho(A)\neq\rho([A|B])$, பின்னர் அமைப்பு $AX=B$ சீரற்றது மற்றும் தீர்வு இல்லை.

உதாரணமாக

பின்வரும் நேரியல் சமன்பாடுகளின் அமைப்பில் ஒரு அளவுரு குடும்பம் இருக்கும் வகையில் a, b மற்றும் c ஆகியவற்றில் நிலையைக் கண்டறியவும் தீர்வுகள்:

x + y + z = a, x + 2 y + 3z = b, 3x + 5 y + 7z = c.

தீர்வு

இங்கு தெரியாத எண் 3 ஆகும்.

அமைப்பின் மேட்ரிக்ஸ் வடிவம் $AX=B$, எங்கே $A=$

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\3&5&7\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}.$$

ஆக்மென்டட் மேட்ரிக்ஸில் அடிப்படை வரிசை செயல்பாடுகளைப் பயன்படுத்துதல் $[A|B]$, நாங்கள் பெறுகிறோம்

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\1&2&3&b\\3&5&7&c\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2-R_1,}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&2&b-a\\0&2&4&c-3a\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&2&b-a\\0&0&0&(c-3a)-2(b-a)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&2&b-a\\0&0&0&(c-2b-a)\end{array}\right].$$

System ஒரு அளவுரு குடும்ப தீர்வுகள் இருக்க வேண்டும் என்பதற்காக, நம்மிடம் இருக்க வேண்டும் $\rho(A)=\rho([A,B])=2$. எனவே, எச்சிலோன் வடிவத்தில் மூன்றாவது வரிசை பூஜ்ஜிய வரிசையாக இருக்க வேண்டும்.

அதனால், $c-2b-a=0\Rightarrow c=a+2b$.

உதாரணமாக

என்ன மதிப்புகளை ஆராயுங்கள் *எல்* மற்றும் *மீ* நேரியல் சமன்பாடுகளின் அமைப்பு

$x+2y+z=7,\ x+y+\lambda z=\mu,\ x+3y-5z=5$ உள்ளது

(i) தீர்வு இல்லை (ii) ஒரு தனித்துவமான தீர்வு (iii) எண்ணற்ற தீர்வுகள்.

தீர்வு

இங்கு தெரியாதவர்களின் எண்ணிக்கை 3 ஆகும்.

அமைப்பின் மேட்ரிக்ஸ் வடிவம் *AX* = *B*, எங்கே *A* =

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ \mu \\ 5 \end{bmatrix}.$$

ஆக்மென்டட் மேட்ரிக்ஸில் அடிப்படை வரிசை செயல்பாடுகளைப் பயன்படுத்துதல் [*A*| *B*], நாங்கள் பெறுகிறோம்

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & \lambda & \mu \\ 1 & 3 & -5 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & \lambda & \mu \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda-1 & \mu-7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-7 & \mu-9 \end{array}\right].$$

(i) $\lambda = 7$ மற்றும் $\mu \neq 9$ என்றால், $\rho(A) = 2$ மற்றும் $\rho([A \mid B]) = 3$. எனவே $\rho(A) \neq \rho([A \mid B])$. எனவே கொடுக்கப்பட்ட அமைப்பு சீரற்ற மற்றும் தீர்வு இல்லை.

(ii) $\lambda \neq 7$ மற்றும் m ஏதேனும் உண்மையான எண்ணாக இருந்தால், $\rho(A) = 3$ மற்றும் $\rho([A \mid B]) = 3$.

எனவே $\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 3$ = தெரியாதவர்களின் எண்ணிக்கை. எனவே கொடுக்கப்பட்ட அமைப்பு சீரானது மற்றும் தனித்துவமானது தீர்வு.

(iii) $\lambda = 7$ மற்றும் $\mu = 9$ எனில், $\rho(A) = 2$ மற்றும் $\rho([A \mid B]) = 2$.

எனவே, $\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 2 <$ தெரியாதவர்களின் எண்ணிக்கை. எனவே கொடுக்கப்பட்ட அமைப்பு சீரானது மற்றும் எல்லையற்றது தீர்வுகளின் எண்ணிக்கை.

அணி: ஒரே மாதிரியாக இல்லாத நேரியல் சமன்பாடுகள்

1. நிலைத்தன்மைக்கான சோதனை மற்றும் முடிந்தால், பின்வரும்

சமன்பாடுகளின் அமைப்புகளை ரேங்க் முறை மூலம் தீர்க்கவும்.

(i) $x - y + 2z = 2$, $2x + y + 4z = 7$, $4x - y + z = 4$

(ii) $3x + y + z = 2$, $x - 3y + 2z = 1$, $7x - y + 4z = 5$

(iii) $2x + 2y + z = 5, x - y + z = 1, 3x + y + 2z = 4$

(iii) $2x - y + z = 2, 6x - 3y + 3z = 6, 4x - 2y + 2z = 4$

SOLUTION

(i) $x - y + 2z = 2$, $2x + y + 4z = 7$, $4x - y + z = 4$

The system of given equations is

$$x - y + 2z = 2 \quad \text{-----(1)}$$
$$2x + y + 4z = 7 \quad \text{-----(2)}$$
$$4x - y + z = 4 \quad \text{-----(3)}$$

This system has 3 unknowns.

The augmented matrix of the system is $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right]$

Applying Gaussian elimination method on $[A|B]$ we get

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 4 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 4R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -7 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right]$$

From the last echelon form the augmented matrix and the coefficient matrix have three non - zero rows. Hence rank of A and $[A|B]$ are same and is equal to the number of unknowns.

That is $\rho(A) = \rho([A|B]) = 3 =$ The number of unknowns.

∴ The system is consistent and has a unique solution. From the last echelon form the equivalent system of equations is

$$x - y + 2z = 2 \quad \text{-----(4)}$$
$$3y - 7z = -4 \quad \text{-----(5)}$$
$$7z = 7 \quad \text{-----(6)}$$
$$z = \frac{7}{7} = 1$$

Substituting $z = 1$ in equation (5)

$$3y - 7 \times 1 = -4 \Rightarrow 3y = -4 + 7$$
$$3y = 3 \Rightarrow y = 1$$

Substituting $y = 1$ and $z = 1$ in equation (4) we get

$$x - 1 + 2 \times 1 = 2 \Rightarrow x = 2 - 1 = 1$$

∴ The required solutions are $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

(ii) $3x + y + z = 2$, $x - 3y + 2z = 1$, $7x - y + 4z = 5$

The system of given equations is

$$3x + y + z = 2 \qquad ----- (1)$$

$$x - 3y + 2z = 1 \qquad ----- (2)$$

$$7x - y + 4z = 5 \qquad ----- (3)$$

The number of unknowns is 3.

The augmented matrix of the system is $[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right]$

Applying Gaussian elimination method on $[A \mid B]$ we get

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 7 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & -1 & 4 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 7R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -5 & -1 \\ 0 & 20 & -10 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

In the last echelon form the augmented and the coefficient matrix have two non - zero rows.

Rank of A, $\rho(A) = 2$

Rank of $[A \mid B]$, $\rho([A \mid B]) = 2$

$\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 2 < 3$, the number of unknowns.

From the last echelon form the equivalent system of equations is

$$x - 3y + 2z = 1 \qquad ----- (4)$$

$$10y - 5z = -1 \qquad ----- (5)$$

The equivalent system has two non - trivial equations and three unknowns. Let us fix one unknown. Let $z = t$,

(5) $\Rightarrow$ $10y - 5t = -1 \Rightarrow 10y = -1 + 5t \Rightarrow y = \dfrac{-1 + 5t}{10}$

Put $z = t$ and $y = \dfrac{-1 + 5t}{10}$ in equation (4) we get

$$x - 3\left(\frac{-1 + 5t}{10}\right) + 2t = 1$$

$$x = 1 + 3\left(\frac{-1 + 5t}{10}\right) - 2t$$

$$x = 1 + \frac{15t - 3}{10} - 2t$$

$$x = \frac{10 + 15t - 3 - 20t}{10} = \frac{-5t + 7}{10}$$

$\therefore$ The required solutions are $x = \dfrac{-5t + 7}{10}$, $y = \dfrac{-1 + 5t}{10}$, $z = t$

(iii) $2x + 2y + z = 5$, $x - y + z = 1$, $3x + y + 2z = 4$

The system of given equations is

$$2x + 2y + z = 5 \quad \text{-----(1)}$$

$$x - y + z = 1 \quad \text{-----(2)}$$

$$3x + y + 2z = 4 \quad \text{-----(3)}$$

In this system the number of unknowns is 3.

The augmented matrix of the system is $[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$

Applying Gaussian elimination method on $[A \mid B]$ we get

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

In the last echelon form the augmented matrix has 3 non - zero rows hence its rank is 3.

That is $\rho([A \mid B]) = 3$

Also from the last echelon form the coefficient matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ has two non - zero rows and hence has order 2. That is $\rho(A) = 2$

So $\rho(A) \neq \rho([A \mid B])$

From the last echelon form the equivalent system of equations is

$$x - y + z = 1 \quad \text{-----(4)}$$

$$4y - z = 3$$

$$0 = -2$$

$0 = -2$ is a contradiction

$\therefore$ The given system is inconsistent and has no solution.

(iv) $2x - y + z = 2$, $6x - 3y + 3z = 6$, $4x - 2y + 2z = 4$

The system of given equations is

$$2x - y + z = 2 \quad \text{-----(1)}$$
$$6x - 3y + 3z = 6 \quad \text{-----(2)}$$
$$4x - 2y + 2z = 4 \quad \text{-----(3)}$$

This system has 3 unknowns.

The augmented matrix of the system is $[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right]$

Applying Gaussian elimination method on $[A \mid B]$ we get

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & 3 & 6 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to \frac{1}{2} R_3]{R_2 \to \frac{1}{3} R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

From the last echelon form the augmented matrix and the coefficient matrix have only one non - zero row and hence their rank is 1.

That is $\rho([A \mid B]) = 1$ and $\rho(A) = 1$

$\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 1 < 3$ the number of unknowns.

From the echelon form we get the equivalent equations

$$2x - y + z = 2 \quad \text{-----(4)}$$
$$0 = 0 \quad \text{-----(5)}$$
$$0 = 0 \quad \text{-----(6)}$$

The equivalent system has one non trivial equation and three unknowns. Take $y = s$ and $z = t$ we get

$$2x - s + t = 2$$
$$2x = 2 + s - t \Rightarrow x = \frac{s - t + 2}{2}$$

$\therefore$ The solution of the system is $x = \dfrac{s - t + 2}{2}$, $y = s$, $z = t$

where s and t are parameters. The above solution set is a two parameter family of solutions.

Hence the given system of equations is consistent and has infinitely many solutions which form a two parameter family of solutions.

2. மதிப்பைக் கண்டறியவும் கே அதற்கான சமன்பாடுகள் $kx - 2y + z = 1$, $x - 2ky + z = -2$, $x - 2y + kz = 1$ உள்ளது

(i) தீர்வு இல்லை

(ii) தனித்துவமான தீர்வு

(iv) எண்ணற்ற தீர்வு

SOLUTION

The system of given equations is

$$kx - 2y + z = 1 \quad \text{-----}(1)$$
$$x - 2ky + z = -2 \quad \text{-----}(2)$$
$$x - 2y + kz = 1 \quad \text{-----}(3)$$

The number of unknowns in this system is 3.

The augmented matrix of the system is $[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} k & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2k & 1 & -2 \\ 1 & -2 & k & 1 \end{array}\right]$

Applying Gaussian elimination method on $[A \mid B]$ we get

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} k & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2k & 1 & -2 \\ 1 & -2 & k & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2k & 1 & -2 \\ k & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & k & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - kR_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2k & 1 & -2 \\ 0 & -2+2k^2 & 1-k & 1+2k \\ 0 & -2+2k & k-1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2k & 1 & -2 \\ 0 & 2(k+1)(k-1) & -(k-1) & 2k+1 \\ 0 & 2(k-1) & k-1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to (k+1)R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2k & 1 & -2 \\ 0 & 2(k+1)(k-1) & -(k-1) & 2k+1 \\ 0 & 2(k-1)(k+1) & (k-1)(k+1) & 3(k+1) \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2k & 1 & -2 \\ 0 & 2(k+1)(k-1) & -(k-1) & 2k+1 \\ 0 & 0 & (k-1)(k+1)+(k-1) & 3(k+1)-(2k+1) \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2k & 1 & -2 \\ 0 & 2(k+1)(k-1) & -(k-1) & 2k+1 \\ 0 & 0 & (k-1)(k+2) & (k+2) \end{array}\right]$$

(i) When $k = 1$, the last echelon matrix reduces to the form $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$

The augmented matrix $[A \mid B]$ has 3 non-zero rows and the coefficient matrix A has only one non-zero row.

$$\therefore \quad \rho(A) = 1 \quad \text{and} \quad \rho([A \mid B]) = 3$$

$$\rho(A) \neq \rho([A \mid B])$$

In this case the system is inconsistent and has no solution.

Thus for $k = 1$, the system is inconsistent and has no solution.

(ii) When $k \neq 1$ and $k \neq -2$ the last row of the echelon form is a non - zero row. Hence in this case both the augmented matrix $[A | B]$ and the coefficient matrix A have three non zero rows.

$\therefore \quad \rho(A) = \rho([A|B]) = 3 =$ the number of unknowns.

Hence the system is consistent and has unique solution.

Thus for $k \neq 1$ and $k \neq -2$ the given system is consistent and has a unique solution.

(iii) When $k = -2$, the last row of the echelon form reduces to zero. Hence in the echelon form both the augmented matrix $[A | B]$ and the coefficient matrix A have two non - zero rows. Therefore rank of A and rank of $[A | B]$ are same and is equal to 2.

$\rho(A) = \rho([A|B]) = 2 < 3$, the number of unknowns.

Hence in this case the system is consistent and has infinite number of solutions.

Thus $k = -2$, the given system is consistent and has infinite number of solutions.

3. 2x + 3y + 5z = 9, 7x + 3y - 5z = 8, 2x + 3y நேரியல் சமன்பாடுகளின் அமைப்பு λ மற்றும் μ இன் மதிப்புகளை ஆராயவும் + λ z = μ , வேண்டும்

(i) தீர்வு இல்லை (ii) ஒரு தனித்துவமான தீர்வு (iii) எண்ணற்ற தீர்வுகள்.

SOLUTION

The system of given equations is

$$2x + 3y + 5z = 9 \quad \text{-----(1)}$$

$$7x + 3y - 5z = 8 \quad \text{-----(2)}$$

$$2x + 3y + \lambda z = \mu \quad \text{-----(3)}$$

In this system the number of unknowns is 3.

The augmented matrix of the system is $[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & -5 & 8 \\ 2 & 3 & \lambda & \mu \end{array}\right]$

Applying Gaussian elimination method on $[A|B]$ we get

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 7 & 3 & -5 & 8 \\ 2 & 3 & \lambda & \mu \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 3 & -5 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & \lambda & \mu \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 - 3R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -20 & -19 \\ 2 & 3 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & \lambda & \mu \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -20 & -19 \\ 0 & 15 & 45 & 47 \\ 0 & 15 & \lambda + 40 & \mu + 38 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -6 & -20 & -19 \\ 0 & 15 & 45 & 47 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 & \mu - 9 \end{array}\right]$$

(i) When $\lambda = 5$ and $\mu \neq 9$, the third row of the echelon form is non - zero. Therefore the augmented matrix $[A|B]$ has three non zero rows but the coefficient matrix A has two non zero rows.

$$\therefore \quad \rho(A) = 2 \;, \quad \rho([A|B]) = 3$$

$$\rho(A) \neq \rho([A|B])$$

Hence the system is inconsistent and has no solution.

Thus for $\lambda = 5$ and $\mu \neq 9$, the system is inconsistent and has no solution.

(ii) When $\lambda \neq 5$, the third row of the augmented matrix in the echelon form is non zero. Therefore both the augmented matrix and the coefficient matrix have three non zero rows hence the rank of the augmented matrix and the coefficient matrix are same and is equal to 3.

$$\rho(A) = \rho([A|B]) = 3 = \text{the number of unknowns.}$$

Hence the system is consistent and has unique solution.

Therefore $\lambda \neq 5$, the given system is consistent and has a unique solution.

(iii) When $\lambda = 5$ and $\mu = 9$, the last row of the echelon form reduces to zero. Therefore in the last echelon form both the augmented matrix $[A|B]$ and the coefficient matrix A have two non zero rows and hence their ranks are equal and is equal to 2.

$$\rho(A) = \rho([A|B]) = 2 < 3, \text{ the number of unknowns.}$$

$\therefore$ The system is consistent and has infinite number of solutions.

Thus for $\lambda = 5$ and $\mu = 9$, the given system is consistent and has infinite number of solutions.

அலகு – III – மையப் போக்கின் நடவடிக்கைகள்

சராசரி - பொருள்

சராசரி என்பது மதிப்புகளின் குழுவைக் குறிக்கும் ஒற்றை மதிப்பு

வரையறை

சராசரி என்பது தரவுகளின் நிகரத்தின் பொதுவான அல்லது பிரதிநிதியான மதிப்பு

ஒரு நல்ல சராசரியின் பண்புகள்

➢வெவ்வேறு நபர்களால் ஒரே ஒரு விளக்கத்திற்கு வழிவகுக்கும் வகையில் இது தெளிவாகவும் தெளிவற்றதாகவும் வரையறுக்கப்பட வேண்டும்.

➢இது புரிந்துகொள்வதற்கு எளிதாகவும், கணக்கிடுவதற்கு எளிமையாகவும் இருக்க வேண்டும் மற்றும் அதிக எண்கணித கணக்கீடுகளை உள்ளடக்கியதாக இருக்கக்கூடாது

➢கொடுக்கப்பட்ட தரவுத் தொகுப்பின் அனைத்துப் பொருட்களையும் அடிப்படையாகக் கொண்டு சராசரியாகக் கணக்கிட வேண்டும்.

➢இது மேலும் இயற்கணித கணித சிகிச்சைக்கு ஏற்றதாக இருக்க வேண்டும் மேலும் மேலும் புள்ளியியல் கணக்கீடுகளில் பயன்படுத்த முடியும்

சராசரி பயன்பாடுகள்

➢விநியோகத்தை சுருக்கமாக விவரிப்பது பயனுள்ளது

➢வெவ்வேறு விநியோகங்களை ஒப்பிடுவது பயனுள்ளது

➢சிதறல், வளைவு, குர்டோசிஸ் மற்றும் பல போன்ற பல்வேறு புள்ளிவிவர நடவடிக்கைகளை ஒப்பிடுவது பயனுள்ளதாக இருக்கும்.

செயல்பாடுகள் அல்லது சராசரி

➢சிக்கலான தரவுகளை விரைவாகப் புரிந்துகொள்ள வசதியாக
➢ஒப்பிடுவதற்கு வசதியாக
➢இது கணித உறவை நிறுவுகிறது
➢மேலும் புள்ளியியல் ஒப்பிடும் திறன் கொண்டது

சராசரி வகைகள்

➢கணித சராசரி

- ➢இடம் சராசரி
- ➢வணிக சராசரி

சராசரியின் குறிக்கோள்கள்

- ➢முழு குழுவின் அம்சங்களையும் விவரிக்கும் ஒற்றை மதிப்பைப் பெற
- ➢சிறந்த ஒப்பீட்டிற்கான அடிப்படையை வழங்குவதற்கு
- ➢மேலும் புள்ளியியல் கணக்கீடு மற்றும் பகுப்பாய்விற்கான அடிப்படையை வழங்குதல்

எண்கணித சராசரி

உருப்படிகளின் வரிசையின் எண்கணித சராசரி என்பது அந்த மொத்த எண்ணால் வகுக்கப்பட்ட அனைத்து பொருட்களின் மதிப்புகளின் கூட்டுத்தொகையாகும். இது ஒரு பன்னாட்டு சராசரி மற்றும் இது மையப் போக்கின் மிகவும் பிரபலமான அளவீடு ஆகும்

ஆண்டிமெடிக் சராசரியின் நன்மைகள்

- ➢கணக்கிட மற்றும் புரிந்து கொள்ள எளிதானது
- ➢இது ஒரு சரியான சராசரி, தொடரில் உள்ள ஒவ்வொரு பொருளின் மதிப்பையும் பாதிக்கிறது
- ➢இது கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு மற்றும் தொடரின் நிலையை அடிப்படையாகக் கொண்டது அல்ல
- ➢இது ஒரு திடமான சூத்திரத்தால் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. எனவே, சராசரியைக் கணக்கிடும் அனைவருக்கும் ஒரே பதில் கிடைக்கும்
- ➢மேலும் கணக்கீட்டில் I t பயன்படுத்தப்படுகிறது
- ➢இது ஒப்பிடுவதற்கு ஒரு நல்ல அடித்தளத்தை அளிக்கிறது

எண்கணித சராசரியின் குறைபாடுகள்

- ➢சராசரியானது தீவிர பொருட்களால் தேவையில்லாமல் பாதிக்கப்படுகிறது
- ➢இது நம்பத்தகாதது தவறான முடிவுக்கு வழிவகுக்கும்
- ➢குணங்களைப் படிக்க இது பயன்படாது
- ➢அதை கிராஃபிக் முறையில் கண்டறிய முடியாது

எண்கணித சராசரி

தனிப்பட்ட தொடர்

பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து எங்களின் சராசரியைக் கண்டறியவும்

ரோல் எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

மதிப் பெண் கள்	21	30	28	40	26	34	40	9	15	17

தீர்வு

ரோல் எண்	மதிப்பெண்கள் (X)
1	21
2	30
3	28
4	40
5	26
6	34
7	40
8	9
9	15
10	17

N=10	ΣX =300

சூத்திரம் = X = ΣX

/NX =300/10 = 30.

சராசரி மதிப்பெண்கள் =30

தனித்துவமான தொடர்

ஒரு தொழிற்சாலையில் உள்ள தொழிலாளர்களின் ஊதியத்திற்கான எண்கணித சராசரியைக் கணக்கிடுங்கள்

ஊதியம் ரூ.	4	6	8	10	15	16
தொழிலா ளர்கள்	5	15	6	7	8	2

தீர்வு

உள்ள ஊதியங்கள் ரூ.	தொழிலாளர்கள் எஃப்	fx
4	5	4x5=20
6	15	6 x 15 = 96
8	6	8x6=48
10	7	10x7=70
15	8	15x8=120
16	2	16x2=32
	N= Σ f=43	Σ fx=380

X = Σ fx /N = 380, N=43

= 380 / 43 = 8.837

தொழிலாளர்களின் சராசரி ஊதியம் = ரூ.8.84

தொடர்ச்சியான தொடர் கணக்கீடு
எண்கணித சராசரி

வர்க்கம் இடைவெளிகள்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
அதிர்வெண்	6	5	8	15	7

வகுப்பு இடைவெளிகள்	நடுப்புள்ளி	அதிர்வெண்	fm
0-10	5	6	30
10-20	15	5	75
20-30	25	8	200
30-40	35	15	525
40-50	45	7	315
		N=∑f=41	N=∑fm=1145

எண்கணித சராசரி = X = = Σ fm / N

எண்கணித சராசரி = 27.92

இடைநிலை

இடைநிலை என்பது, ஏறுவரிசை அல்லது இறங்கு வரிசையில் அமைக்கப்பட்ட தொடரின் நடுப் பொருளின் மதிப்பாகும். எனவே இது எண்களின் தொகுப்பின் "நடுத்தர மிக" அல்லது "மிக மைய" மதிப்பாகும். இது தொடரை இரண்டு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கிறது, ஒரு பகுதி அதிக மதிப்புகளையும் மற்றொன்று இடைநிலையை விட குறைவான மதிப்புகளையும் கொண்டுள்ளது.

பொருள்

எண் என்பது மாறியின் மதிப்பாகும், இது குழுவை இரண்டு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கிறது, ஒரு பகுதி அனைத்து மதிப்புகள் அதிகமாகவும் மற்றொன்று, அனைத்து மதிப்புகளும் சராசரியை விட குறைவாகவும் இருக்கும்.

சராசரியின் நன்மைகள்:

- கணக்கிட்டுப் புரிந்துகொள்வது எளிது
- இது தீவிர பொருளின் விளைவை நீக்குகிறது
- சராசரியின் மதிப்பை வரைகலையாகக் காணலாம்
- மீடியனின் குறைபாடுகள்
- கணக்கிடும் ஊடகம், தரவுகளை ஒழுங்கமைப்பது அவசியம் மற்ற சராசரிகளுக்கு ஒரு ஏற்பாடு தேவையில்லை
- இது எண்கணித சராசரியை விட மாதிரியின் ஏற்ற இறக்கத்தால் அதிகம் பாதிக்கப்படுகிறது.
- இது தொடரின் அனைத்து பொருட்களையும் அடிப்படையாகக் கொண்டது அல்ல

தனிப்பட்ட தொடர்

ஏறுவரிசை அல்லது இறங்கு வரிசையில் தரவை வரிசைப்படுத்தவும்

சராசரி - N + 1 அளவு ...... வது ..... பொருள்2

பின்வருவனவற்றிலிருந்து சராசரியைக் கண்டறியவும்

57	58	61	42	38	65	72	66	80

தீர்வு

Sl.No	தரவு ஏறுவரிசையில் வரிசைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது
1	38
2	42
3	57
4	58
5	62
6	65
7	66
8	72
9	80

இடைநிலை= – N + 1th / 2

- = 9 + 1 அளவு
- ------------ அந்த பொருள்
- 2
- = 10 / 2 = 5வதுபொருள்

சராசரி = 62

தனித்துவமான தொடர்

xyz நிறுவனத்தின் 65 ஊழியர்களின் கூலி வாரங்களின் பின்வரும் விநியோகத்திற்கான சராசரியைக் கணக்கிடுங்கள்

வாரந்தோறும் ஊதியங்கள் ரூ	55	65	785	85	95	105	115
ஊழியர்களின் எண்ணிக்கை	8	10	16	14	10	5	2

தீர்வு

வார ஊதியம் ரூ	பணியாளர்களின் எண்ணிக்கை	ஒட்டுமொத்த அதிர்வெண் (cf)
55	8	8
65	10	18
75	16	34
85	14	48
95	10	58
105	5	63
115	2	65

இடைநிலை = –N + 1 அளவு

வது பொருள்

2

= 65 + 1 அளவு

வது

பொருள்2

= 33’ இது 34க்கு அருகில் உள்ளது

Cf of 34 = 75

சராசரி வார ஊதியம் = 75

தொடர்ச்சியான தொடர்

பின்வரும் தரவுகளின் சராசரி படிவத்தை கணக்கிடவும்

மதிப்பெண்கள்	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5	15	30	8	2

தீர்வு

மதிப்பெண்கள்	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	ஒட்டுமொத்த அலைவரிசை
0-20	5	5
20-40	15	20
40-60	30	50
60-80	8	58
80-100	2	60

N இன் சராசரி = –அளவு

------------ 60/2வது உருப்படியின் அளவு c

2

N / 2 - cf

=L + X C அளவு

f

30 - 20

= 40 + ------------------- x 20 = 46.47

2

சராசரி மதிப்பெண்கள் = 46.676

பயன்முறை

பயன்முறை என்பது மாறியின் மதிப்பில் உள்ள மாதிரி மதிப்பு, இது அதிக முறை அல்லது அடிக்கடி நிகழ்கிறது. பயன்முறை என்பது ஒரு தொடரில் அதிக எண்ணிக்கையிலான அதிர்வெண்ணுடன் நிகழும் மதிப்பு

மாதிரியின் வகைகள்

I. .யூனி-மாடல்

தொடரில் ஒரே ஒரு முறை இருந்தால் அது யூனி மாடல் எனப்படும்

II. இரு மாதிரி

தொடரில் இரண்டு முறைகள் இருந்தால், அது இரு மாதிரி எனப்படும்

III. ட்ரை-மாடல்

அவை தொடரில் மூன்று முறைகளாக இருந்தால், அது வெவ்வேறு சராசரிகளுக்கு இடையிலான உறவு சமச்சீர் ட்ரை-மாடல் என்று அழைக்கப்படுகிறது.

IV. பலவகை

தொடரில் மூன்று முறைகளுக்கு மேல் இருந்தால் அது பல முறை எனப்படும்.

சராசரி, இடைநிலை மற்றும் பயன்முறைக்கு இடையேயான உறவு விநியோகம் சமச்சீராக இருக்கும்போது மூன்று சராசரிகளும் ஒரே மாதிரியாக இருக்கும். சமச்சீரற்ற விநியோகத்தில், சராசரி, இடைநிலை மற்றும் பயன்முறையின் மதிப்புகள் சமமாக இருக்காது.

சராசரி = 1/3 (சராசரி - பயன்முறை)

பயன்முறை = 2 இடைநிலை - 2 முறை

இடைநிலை = பயன்முறை * 2/3 (சராசரி - பயன்முறை)

தனிப்பட்ட தொடர்

10 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் பின்வரும் தரவைக் கொண்டு பயன்முறையைக் கணக்கிடுங்கள்

வரிசை எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மதிப்பெண்கள் பெறப்பட்டது	60	77	74	62	77	77	70	68	65	80

தீர்வு

10 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்கள் இங்கே 77 மூன்று முறை திரும்பத் திரும்ப வருகிறது எனவே பயன்முறை குறி 77 ஆகும்

தனித்துவமான தொடர்

ஸ்தாபனத்தின் தொழிலாளர்களின் ஊதியம் குறித்த பின்வரும் தரவின் படிவத்தை கணக்கிடுங்கள். மாதிரி ஊதியத்தைக் கண்டறியவும்

தினசரி ஊதியங்கள் ரூ	3	4	6	7	9	10	12	13	15
எண் கூலி சம்பாதிப்பவர்கள்	2	3	2	6	10	11	12	5	1

தீர்வு தொகுத்தல்

<table>
<tr><td rowspan="2">தினசரி ஊதியம் ஆகும் ரூ.</td><td colspan="6">ஊதியம் பெறுபவர்களின் அதிர்வெண்</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>3</td><td>2</td><td rowspan="2">5</td><td></td><td rowspan="3">7</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="3">11</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>2</td><td rowspan="2">8</td><td rowspan="3">18</td></tr>
<tr><td>7</td><td>6</td><td rowspan="2">16</td><td rowspan="3">27</td></tr>
<tr><td>9</td><td>10</td><td rowspan="2">21</td><td rowspan="3">33</td></tr>
<tr><td>10</td><td>11</td><td rowspan="2">23</td><td rowspan="3">28</td></tr>
<tr><td>12</td><td>12</td><td rowspan="2">17</td><td rowspan="3">18</td></tr>
<tr><td>13</td><td>5</td><td rowspan="2">6</td><td></td></tr>
<tr><td>15</td><td>1</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

Column	**SizeofItem**						
	4	**6**	**7**	**9**	**10**	**12**	**15**
1						**I**	
2				**I**	**I**	**I**	
3					**I**	**I**	
4			**I**	**I**	**I**		
5				**I**	**I**	**I**	
6					**I**	**I**	**I**
			I	**3**	**5**	**4**	**1**

பகுப்பாய்வு அட்டவணையில் இருந்து, அளவு 10 அதிகபட்ச முறை மீண்டும் மீண்டும் செய்யப்பட்டுள்ளது என்று அறியப்படுகிறது, எனவே மாதிரி ஊதியம் ரூ10 ஆகும்.

தொடர்ச்சியான தொடர்

பின்வரும் தொடரிலிருந்து பயன்முறையைக் கண்டறியவும்

X	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
அதிர்வெண்	1	2	5	14	10	9	2

தொகுத்தல் அட்டவணை

<table>
<tr><td rowspan="2">X</td><td colspan="6">Frequency</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>0-5</td><td>1</td><td rowspan="2">3</td><td></td><td rowspan="3">8</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5-10</td><td>2</td><td rowspan="2">7</td><td rowspan="3">21</td><td></td></tr>
<tr><td>10-15</td><td>5</td><td rowspan="2">19</td><td rowspan="3">29</td></tr>
<tr><td>15-20</td><td>14</td><td rowspan="2">24</td><td rowspan="3">33</td></tr>
<tr><td>20-25</td><td>10</td><td rowspan="2">19</td><td rowspan="3">21</td></tr>
<tr><td>25-30</td><td>9</td><td rowspan="2">11</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>30-35</td><td>2</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Column	**Sizeof Item**						
	0-5	**5-10**	**10-15**	**15-20**	**20-25**	**25-30**	**30-35**
1				**I**			
2			**I**	**I**	**I**		
3				**I**	**I**	**I**	
4				**I**	**I**	**I**	
5		**I**	**I**	**I**	**I**	**I**	**I**
6			**I**				
		1	**3**	**6**	**5**	**3**	**1**

இது அடிக்கடி நிகழும் என்பதால் மாதிரி மதிப்பு 15-20 **இல் உள்ளது**

f1 - f0

பயன்முறை (Z) = L + xC

2 f1 - f0 - f2

14 - 5

பயன்முறை (z) = 154 +----------------------- 5

2(14) - 5 - 10

= 15 + 9/13 X 5 = 15 + 45/13

= 15 + 3.46

பயன்முறை = 18.46

வடிவியல் சராசரி

வடிவியல் சராசரியின் தகுதிகள்

- விநியோகத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு பொருளும் கணக்கீட்டில் சேர்க்கப்பட்டுள்ளது
- அனைத்து குணங்களும் பூஜ்ஜியத்தை விட அதிகமாகவும் நேர்மறையாகவும் இருந்தால், அதை கணித துல்லியத்துடன் கணக்கிடலாம்.
- எண்கணித சராசரியை விட பெரிய பொருட்கள் அதன் மீது குறைவான விளைவைக் கொண்டிருக்கின்றன.
- இது மேலும் இயற்கணிதக் கையாளுதலுக்கு ஏற்றது

Geometirc **இன் குறைபாடுகள்**

- கணக்கிடுவது மிகவும் கடினம்
- எந்தவொரு பொருளும் பூஜ்ஜியமாகவோ அல்லது எதிர்மறையாகவோ இருக்கும்போது அதைப் பயன்படுத்த முடியாது
- வடிவியல் சராசரியின் மதிப்பு, விநியோகத்தில் உள்ள எந்த உண்மையான மதிப்புடனும் ஒத்துப்போகாமல் இருக்கலாம்

வடிவியல் சராசரியின் பயன்பாடுகள்

- இந்த சராசரி பெரும்பாலும் குறியீட்டு எண்களை உருவாக்கப் பயன்படுத்தப்படுகிறது, அங்கு நாம் முக்கியமாக குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் ஏற்படும் மாற்றங்களைப் பற்றி கவலைப்படுகிறோம்.
- கொண்ட விகிதத்தைக் குறிக்கப் பயன்படுத்தக்கூடிய ஒரே பயனுள்ள சராசரி இதுவாகும்

தனிப்பட்ட தொடர்

$$G.M = \text{Anti ling of } \frac{\Sigma \log X}{N}$$

வடிவியல் சராசரியைக் கணக்கிடுங்கள்

50	72	54	82	93

தீர்வு

X	Log X
50	1.6990
72	1.8573
54	1.7324
82	1.9238
93	1.9685

$$G.M = \text{Anti ling of } \frac{\Sigma \log X}{N}$$

$$= \frac{9.1710}{5} = 1.8342$$

= Antilogof1.8342=68.26

தனித்துவமான தொடர்
கணக்கிடு

பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து வடிவியல் சராசரி

அளவு பொருள்	120	125	130	135	136	138	139	140	147
அதிர்வெண்	2	3	3	1	1	7	4	2	8

பொருளின் அளவு (**எக்ஸ்**)	**அதிர்வெண்** (**எஃப்**)	**பதிவு** X	**எஃப் பதிவு** x
120	2	2.0792	4.1584
125	3	2.0969	6.2907
1360	3	2.1139	6.3417
135	1	2.1303	2.1303
136	2	2.1335	4.2670
138	7	2.1399	14.9793
139	4	2.1430	8.5720
140	2	2.1461	4.2922
147	8	2.1673	17.3384
	N=Σf=32		N==Σf **பதிவு** x = 68.3700

$$G.M = \text{Anti ling of } \frac{\Sigma \log X}{N} = \text{Anti log of } \frac{68.375}{32}$$

= 2.1366 **இன் ஆன்டிலாக்** = 137 **எனவே** G.M = 137

தொடர்ச்சியான தொடர்

பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து வடிவியல் சராசரி

கோதுமை மகசூல்	7.54-10.5	10.5-13.5	13.5 -16.5	16.5-19.5	19.5-22.5	22.5-25.5	25.5-28.5
எண் வடிவங்கள்	5	9	19	23	7	4	1

கோதுமை மகசூல்	**நடுத்தர மதிப்பு**	**பதிவு எம்**	**எண் படிவங் கள்**	flog m
7.54-10.5	9	0.9542	5	4.7710
10.5-13.5	12	1.0792	9	9.7128
13.5 -16.5	15	1.1761	19	22.3459
16.5-19.5	18	1.2553	23	28.8719
19.5-22.5	21	1.3222	7	9.2554
22.5-25.5	24	1.3802	4	5.5208
25.5-28.5	27	1.4314	1	1.4314
			N=68	Σ flog m=81.9092

G.M = Anti logof Σ f log m / N

= 81.9092/68 = 1.204547

= Antilog of 1.204547 = 16.02 ஜி.எம் = 16.02

ஹார்மோனிக் சராசரி

பொருள்

ஹார்மோனிக் சராசரி என்பது மாறாத பொருளில் உள்ள பல்வேறு பொருட்களின் மதிப்புகளின் எண்கணித சராசரியின் பரஸ்பரம்

ஹார்மோனிக் சராசரியின் தகுதிகள்

- இது ஒரு மாறியின் அனைத்து மதிப்புகளையும் பயன்படுத்துகிறது
- சிறிய மதிப்புகளுக்கு இது மிகவும் முக்கியமானது

➢இது மேலும் இயற்கணித கையாளுதலுக்கு ஏற்றது

➢இது ஒரே மாதிரியான சராசரியை விட நேரம் மற்றும் விகிதங்கள் தொடர்பான சிக்கல்களில் நிலையான முடிவுகளை வழங்குகிறது

ஹார்மோனிக் சராசரியின் குறைபாடுகள்

➢புரிந்துகொள்வது மிகவும் எளிதானது அல்ல

➢கணக்கிடும் முறை கடினமானது

➢ஒரு தொடரில் நேர்மறை மற்றும் எதிர்மறை உருப்படிகள் இருப்பதால் அதன் மதிப்பைக் கணக்கிட முடியாது. ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட பொருட்கள் பூஜ்ஜியமாக இருந்தால் அதே சிரமம் உணரப்படுகிறது

➢இது ஒரு சுருக்கமான எண்ணிக்கை மட்டுமே மற்றும் தொடரின் உண்மையான உருப்படியாக இல்லாமல் இருக்கலாம்.

தனிப்பட்ட தொடர்

$$H.M = N / \sum 1/x$$

ஹார்மோனிக் சராசரியைக் கண்டறியவும்

குடும்பம்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
வருமானம்	85	70	10	75	500	8	42	250	40	36

தீர்வு

ஹார்மோனிக் சராசரியின் கணக்கீடு

குடும்பம் மற்றும்	**வருமானம் (எக்ஸ்)**	1 / x
1	85	0.01176
2	70	0.01429
3	10	0.10000
4	75	0.01333
5	500	0.00200
6	8	0.12500
7	42	0.02381
8	250	0.00400
9	40	0.02500
10	36	0.02778

N =10		Σ1/x = 0.34697

H.M = N / $\sum$1/x

= 10 /0.34697 = 28.82 H.M = 28.82

தனித்துவமான தொடர்

பொருளின் அளவு	6	7	8	9	10	11
அதிர்வெண்	4	6	9	5	2	8

பொருளின் அளவு எக்ஸ்	**அதிர்வெண்** f	1/x	F 1/x
6 7 8 9 10 11	4 6 9 5 2 8	0.1667 0.1429 0.1250 0.1111 0.1000 0.0909	0.6668 0.8574 1.1250 0.5555 0.20000.7272
	N= Σ f =34		Σ f 1/x = 4.1319

N 34

H.M = ------- ----------= = 8.23

Σ f1/x 4.1319

ஹார்மோனிக் சராசரியைக் கணக்கிடுங்கள்

தொடர்ச்சியான தொடர்

அளவு	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
அதிர்வெண்	5	8	12	6	4

தீர்வு

அளவு	**அதிர்வெண்** f	**நடுத்தர மதிப்பு**	**பரஸ்பர**	F(1/m)
0-10 10-20 20-30 -30-40 40-50	5 8 12 6 4	5 15 25 35 45	0.20000 0.06667 0.04000 0.02857 0.02222	1.00000 0.53336 0.48000 0.17142 0.08888
	$\Sigma f = 35$			$\Sigma f\, 1/m =$ 2.27366

$$H.M = \frac{N}{\sum f1/m} = \frac{35}{2.27366} = 15.393682$$

சிதறல் பொருள்

சிதறல் என்பது சராசரியைச் சுற்றியுள்ள சிதறல் பற்றிய ஆய்வு ஆகும்

வரையறை

சிதறல் என்பது பொருட்களின் மாறுபாட்டின் அளவீடுகள் --- A.L.Bowly Dispersion என்பது தனிப்பட்ட பொருட்கள் மாறுபடும் அளவின் அளவீடு ஆகும் --- L.R.Conno r

மாறுபாடு அல்லது சிதறலை அளவிடுவதன் முக்கியத்துவம்

- மத்திய போக்கு நடவடிக்கைகளின் நம்பகத்தன்மையை சோதித்தல்
- இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தொடர்களை அவற்றின் மாறுபாட்டின் அடிப்படையில் ஒப்பிடுதல்
- மாறுபாட்டைக் கட்டுப்படுத்த உதவுகிறது
- மேலும் புள்ளியியல் பகுப்பாய்விற்கு ஒரு அடிப்படையாக உதவுகிறது

மாறுபாட்டின் அளவீட்டின் சிறப்பியல்புகள்

- இது புரிந்து கொள்ள எளிதானது மற்றும் கணக்கிட எளிதானது
- இது கடுமையாக வரையறுக்கப்பட வேண்டும்
- இது அனைத்து அவதானிப்புகளின் அடிப்படையிலும் இருக்க வேண்டும் மற்றும் தீவிர அவதானிப்புகளால் பாதிக்கப்படக்கூடாது
- இது மேலும் இயற்கணித சிகிச்சைக்கு ஏற்றதாக இருக்க வேண்டும்
- இது மாதிரி நிலைத்தன்மையைக் கொண்டிருக்க வேண்டும்

சிதறலை அளவிடும் முறைகள்

- ➢சரகம்
- ➢இன்டர் காலாண்டு வரம்பு
- ➢காலாண்டு விலகல்
- ➢சராசரி விலகல்
- ➢நிலையான விலகல்
- ➢லோரன்ஸ் வளைவு

சரகம்

வரம்பு என்பது விநியோகத்தில் உள்ள மிகப்பெரிய மற்றும் சிறிய மதிப்புக்கு இடையிலான வேறுபாடு. இது சிதறலின் எளிய மற்றும் கசப்பான அளவீடு ஆகும்

வரம்பின் பயன்பாடுகள்

➢இது ꖴ பாதிக்கப்பட்ட உற்பத்தியின் புள்ளிவிவர தரக் கட்டுப்பாட்டிற்கு தொழில்களில் பயன்படுத்தப்படுகிறது➢பங்குகள், பங்குகள் மற்றும் பிற பொருட்கள் போன்ற மாறுபாடுகளைப் படிக்க இது பயன்படுகிறது➢இது மற்ற புள்ளிவிவர நடவடிக்கைகளின் பயன்பாட்டை எளிதாக்குகிறது

வரம்பின் நன்மைகள்

- ➢இது மாறுபாட்டைப் படிக்கும் எளிய முறையாகும்
- ➢இது புரிந்து கொள்ள எளிதானது மற்றும் கணக்கிட எளிதானது
- ➢கணக்கிட குறைந்தபட்ச நேரம் எடுக்கும்
- ➢இது துல்லியமானது

வரம்பின் தீமைகள்

➢வரம்பு முற்றிலும் இரண்டு தீவிர மதிப்புகளைப் பொறுத்தது
➢இது மாதிரியிலிருந்து மாதிரிக்கு கணிசமான அளவு ஏற்ற இறக்கங்களுக்கு உட்பட்டது➢இது கணித சிகிச்சைக்கு ஏற்றதல்ல
➢திறந்த மற்றும் வகுப்புகளுக்கு இதைப் பயன்படுத்த முடியாது
➢விநியோகத்தின் தன்மை பற்றி ரேஞ்ச் எங்களிடம் எதுவும் சொல்ல முடியாது

காலாண்டு விலகல்

காலாண்டு விலகல் என்பது சிதறலின் முழுமையான அளவீடு ஆகும். இது மேல் காலாண்டு மற்றும் கீழ் காலாண்டின் வேறுபாட்டின் அடிப்படையில் 2 ஆல் வகுக்கப்படுகிறது.

தொடரில், நான்கு காலாண்டுகள் உள்ளன. ஒரு தொடரின் மிகக் குறைந்த (25%) உருப்படிகள் மற்றும் அதிக (25%) உருப்படிகளை நீக்குவதன் மூலம், நாம் சிதறலின் அளவைப் பெறலாம் மற்றும் முதல் மற்றும் மூன்றாவது காலாண்டுகளுக்கு இடையில் பாதி தூரத்தைக் கண்டறியலாம்.

காலாண்டு விலகல் (Q.D) = $\frac{Q3 - Q1}{2}$

Q.D இன் இணை-திறன் = Q3 - Q1 / Q3 + Q1

காலாண்டு விலகலின் தகுதிகள்

- இது கணக்கிட எளிதானது மற்றும் புரிந்து கொள்ள எளிதானது
- தீவிர உருப்படி மாறுபாட்டின் ஆபத்து நீக்கப்பட்டது, ஏனெனில் இது மைய 50 சதவீத பொருட்களைப் பொறுத்தது
- இது திறந்த மற்றும் வகுப்புகளுக்குப் பயன்படுத்தப்படலாம்

காலாண்டு விலகலின் குறைபாடுகள்

- Q1க்குக் கீழே மற்றும் Q3க்கு மேல் உள்ள உருப்படிகள் புறக்கணிக்கப்படுகின்றன
- இது மேலும் கணித சிகிச்சைக்கு திறன் இல்லை
- இது மாதிரியின் ஏற்ற இறக்கங்களால் அதிகம் பாதிக்கப்படுகிறது
- இது கணக்கிடப்பட்ட சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்படவில்லை,

ஆனால் நிலை சராசரியிலிருந்து கணக்கிடப்படுகிறது.

சராசரி விலகல்

சராசரி விலகல் என்பது, அந்தத் தொடரின் சராசரி, இடைநிலை அல்லது பயன்முறையில் இருந்து கணக்கிடப்பட்ட ஒரு விநியோகத்தில் உள்ள உருப்படிகளுக்கு இடையேயான சராசரி வேறுபாடு ஆகும். சராசரி விலகல் சராசரி விலகல் என்றும் அழைக்கப்படுகிறது

சராசரி விலகல் = Σ| D | / N

சராசரி விலகலின் இணை செயல்திறன் (M.D)=MD / X or Z or M

சராசரி விலகலின் தகுதிகள்

➢இது தெளிவாகவும் புரிந்துகொள்ளவும் எளிதானது

இது தரவுகளின் ஒவ்வொரு உருப்படியையும் அடிப்படையாகக் கொண்டது, இது எந்த மையப் போக்கிலிருந்தும் கணக்கிடப்படலாம் மற்றும் நெகிழ்வானது போன்றது..

சராசரி விலகலின் குறைபாடுகள்

- **அது**மேலும் கணித செயலாக்கத்திற்கு ஏற்றது அல்ல
- இது சமூகவியல் ஆய்வுகளில் அரிதாகவே பயன்படுத்தப்படுகிறது
- சராசரி விலகல் கணக்கீட்டில் அறிகுறிகள் புறக்கணிக்கப்படுவதால், இது கணித ரீதியாக பொருத்தமற்றது மற்றும் நியாயமற்றது.

நிலையான விலகல்

நிலையான விலகல் என்பது எண்கணித சராசரியிலிருந்து **நிலையான** விலகலின் வழிமுறையின் வர்க்க மூலமாகும். எனவே, இது ரூட் சராசரி சதுர விலகல் மற்றும் வினாடியின் சராசரி என்றும் அழைக்கப்படுகிறது
உத்தரவு. நிலையான விலகல் சிறிய கிரேக்க எழுத்தால் குறிக்கப்படுகிறது 'σ' 1893 இல் கார்ல் பியர்ஸனால் நிலையான விலகல் கருத்து அறிமுகப்படுத்தப்பட்டது.

நிலையான விலகலின் பயன்பாடுகள்

- இது புள்ளிவிவரங்களில் பயன்படுத்தப்படுகிறது, ஏனெனில் இது ஒரு சிறந்த அளவிலான சிதறலின் பண்புகளைக் கொண்டிருக்க வேண்டும்.
- இது மாதிரிக் கோட்பாடு மற்றும் உயிரியலாளர்களால் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது.
- இது இணைத் தொடர்பு மற்றும் சமச்சீர் அதிர்வெண் விநியோகம் பற்றிய ஆய்வில் பயன்படுத்தப்படுகிறது

நிலையான விலகலின் நன்மைகள்

- இது உறுதியாக வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது
- இது ஒரு தொடரின் அனைத்து அவதானிப்புகளையும் அடிப்படையாகக் கொண்டது
- இது மாதிரியின் ஏற்ற இறக்கங்களால் குறைவாக பாதிக்கப்படுகிறது, எனவே நிலையானது
- இது இயற்கணித சிகிச்சைக்கு ஏற்றது மற்றும் பிற சிதறல் நடவடிக்கைகளின் மாதிரியின் ஏற்ற இறக்கங்களால் குறைவாக பாதிக்கப்படுகிறது.
- சராசரி விலகலை விட நிலையான விலகல் கணித ரீதியாக மிகவும்

பொருத்தமானது, ஏனெனில் எதிர்மறை அறிகுறிகள் புறக்கணிக்கப்படுவதை விட விலகல்களை சதுரப்படுத்துவதன் மூலம் அகற்றப்படுகின்றன.

மாறுபாட்டின் இணை செயல்திறன்

நிலையான விலகல் என்பது சிதறலின் முழுமையான அளவீடு ஆகும். தொடர்புடைய ஒப்பீட்டு அளவீடு மாறுபாட்டின் இணை=-திறன் என அழைக்கப்படுகிறது. இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தொடர்களின்

Co–efficientofStandarddeviation = σ / x

Co-efficientofVariance(C.V)= σ/ X x100

கிராஃபிக் முறை
சிதறல்லோரன்ஸ் வளைவு

Lorenz Curve என்பது வருமானம் மற்றும் செல்வத்தின் விநியோகம் போன்ற பொருளாதார ஏற்றத்தாழ்வுகளை அளவிட பயன்படும் ஒரு சாதனம் ஆகும். லாபம், ஊதியம், விற்றுமுதல், உற்பத்தி மற்றும் பலவற்றின் வேறுபாடுகளைப் படிக்க வணிகத்திலும் இதைப் பயன்படுத்தலாம்.

சரகம்

வரம்பு = L-S

வரம்பின் இணை-திறன் = L-S / L+S

தீர்க்கப்பட்ட சிக்கல்கள்
158,160,165,168,170,173 வகுப்பைச் சேர்ந்த 8 மாணவர்களின் உயரத்திற்கான வரம்பையும் இணைத் திறனையும் கண்டறியவும்.

தீர்வு

வரம்பு = L-S
கொடுக்கப்பட்ட தொடரின் மிகப்பெரிய மதிப்பு = 173
தொடரின் சிறிய மதிப்பு = 158
வரம்பு = 178 – 158 = 15
வரம்பின் இணை-திறன் = L-S / L+S = 0.045

காலாண்டு விலகல்

காலாண்டு விலகல் = Q3 - Q1 / 2

தனிப்பட்ட தொடர்

பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து காலாண்டு விலகலின் மதிப்பையும் அதன் இணைதிறனையும் கண்டறியவும்

ரோல் எண்	1	2	3	4	5	6	7
மதிப்பெண்கள்	20	28	40	30	50	60	52

தீர்வு

மதிப்பெண்கள் ஏறுவரிசையில் அமைக்கப்பட்டுள்ளன

20,28,30,40,50,52,60N + 1

Q1 = **பொருளின் அளவு** / 4th item

= **அளவு** 7 + 1

---------- **வது உருப்படி** = 8/4 **வது உருப்படி**

4

= **அளவு** 2nd**பொருள்** = 28

3(N + 1)

Q3 = **அளவு** ----------------**வது உருப்படி**

4

= 3(7+1) / 4

= 3 x 8 / 4 = 24/4 = 6வது பொருள்

6 **இன் அளவு**வது**பொருள்** = 52

Q.D = Q3 – Q1 / -2 = 52-28 / 2.

Q.D **இன் இணை-திறன்** = 52-28/ 52+28 = 24/80 = 0.3.

தனித்துவமான தொடர்

பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து காலாண்டு விலகலைக் கணக்கிடுங்கள் மற்றும் அது இணை செயல்திறன் கொண்டது

X	26	28	32	35	29	24
f	6	7	9	10	7	4

தீர்வு

எக்ஸ்	f	cf
24	6	6
26	6	12 Q1
28	7	19
29	7	26
32	9	35 Q3
35	10	45
	N= Σ f=45	

$$Q1 = \text{பொருளின் அளவு } \frac{N+1}{4}$$

$$= \text{அளவு } \frac{45+1}{4} \text{வது உருப்படி} = 46/4$$

= 11.5 **அளவு**$^{\text{வது}}$**பொருள்** = 26

3(N + 1)

Q3 = **அளவு** -----------------**வது உருப்படி**

4

= 3(45 +1)

---------- = 34.5**வது பொருள்** =32

4

Q.D **இன் இணை-திறன்** = 52-28/ 52+28 = 24/80 = 0.3.

தொடர்ச்சியான தொடர்

பின்வரும் அட்டவணையில் இருந்து. காலாண்டு விலகலையும் அதன் இணைதிறனையும் கணக்கிடுங்கள்

அளவு	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	24-28	28-32	32-36	36-40
அதிர் வெண்	6	10	18	30	15	12	10	6	2

தீர்வு

வாரந்தோறும் ஊதியங்கள் (x)	**தொழிலாளர்களின் எண்ணிக்கை எஃப்**	cf
4-8	6	4
8-12	10	16
12-16	18	34
16-20	30	64
20-24	15	79
24-28	12	91
28-32	10	101
32-34	6	107
34-40	2	109

	N==∑f=109	

Q1 = N/4 109/4 = 27.25

Q1 **என்பது** 12-16 **வகுப்புகளுக்கு இடைப்பட்டதாகும்** N/4 cf

Q1 = L = 27.25 - 16

= 12 + x 4

18

11.25

= 12 + ---------------- 4

18

= 12 + 45/ 18 = 121 + 2.5 = 14.5

Q1 = 14.5

Q3 = 3N/4 = 3(109)/4 = 81.75

Q3 வகுப்பு இடைவெளி 24 - 28 க்கு இடையில் உள்ளது

3N/4 -cf

Q3 = L +---------------x C

f

81.75-79

= 24 + X 4

12

= 24 + 0.916

Q3 = 24.92

$$Q.D = \frac{Q3=-Q1}{2} = \frac{24.92 \quad -14.5}{2} = \frac{10.42}{2} = 5.21$$

சராசரி விலகல்
தனிப்பட்ட தொடர்

$$M.D = \frac{\sum IDI}{N}$$

M.D இன் இணை செயல்திறன் = $\frac{\text{M.D}}{\text{சராசரி அல்லது இடைநிலை அல்லது பயன்முறை}}$

பின்வரும் தரவுகளுக்கான ஆர்திமெடிக் சராசரியிலிருந்து சராசரி விலகல் a d அதன் குணகத்தைக் கணக்கிடுக

100	150	200	250	300

தீர்வு

எக்ஸ்	**IDI = X-X**
100 150 200 250 300	100 50 0 50 100
∑x= 1000	**∑I DI = 300**

சராசரி = ∑x / N = 1000/5 = 200

M.D = $\frac{\sum \text{I OF}}{\text{என்}}$ = 300 /5 =60

M.D இன் இணை செயல்திறன் = $\frac{\text{சராசரி விலகல்}}{\text{சராசரி}} = \frac{60}{200}$ 0.3

தனித்துவமான தொடர்

பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து மத்தியஸ்தத்திலிருந்து சராசரி விலகல் மற்றும் அதன் இணைதிறன் ஆகியவற்றைக் கண்டறியவும்

X	10	11	12	13	14
f	3	12	18	12	3

தீர்வு

எக்ஸ்	**f**	**cf**
10 11 12 13 14	3 12 18 12 3	3 15 33 45 48
		48

$$\text{இடைநிலை} = \frac{N+1}{2} \text{வது பொருளின் அளவு}$$

$$= \frac{48+1}{2} \text{வது பொருளின் அளவு}$$

= 24.5 அளவு வது பொருள் = 12

எக்ஸ்	**f**	**IDI (X –Median)= x**	
10 11 12 13 14	3 12 18 12 3	2 1 0 1 2	6 12 0 12 6
			∑fI DI = 36

$\sum$fIDI 36

சராசரி விலகல் = ---------------- = ------------- = 0.75

N 48

MD 0.75

M.D இன் இணை-திறன் = ------------- = ---------- = 0.0625

சராசரி 12

தொடர்ச்சியான தொடர்

பின்வரும் தரவுக்கான k சராசரியிலிருந்து சராசரி விலகலின் இணை-திறனைக் கண்டறியவும்

ஆண்டுகளில் வயது	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
எண் நபர்கள்	20	25	32	40	42	35	10	8

தீர்வு

வயது ஆண்டு கள்	**மீ**	**எண் நபர்கள் எஃப்**	**D=m-A**	**fd**	**IDI=m-X**	**என் கைகளில்**
0-10	5	20	-30	-600	31.5	630.0
10-20	15	25	-20	-500	21.5	537.5
20-30	25	32	-10	-320	11.5	368.0
30-40	35	40	0	0	1.5	60.0
40-50	45	42	10	420	8.5	357.0
50-60	55	35	20	700	18.5	647.5
60-70	65	10	30	300	28.5	285.0
70-80	75	8	40	320	38.5	308.0
		N = 212		**$\sum$fd=320**		**$\sum$fI DI = 3193.0**

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{12} = 35 + \frac{320}{12} = 35n + 1.5 = 36.5N$$

$\bar{X}$ =36.5 ஆண்டுகள்

$$M.D = \frac{\sum fd}{N} = \frac{3193}{212} = 15.06$$

M.D இன் இணை செயல்திறன் $= \frac{M.D}{Mean} = \frac{15.06}{36.5} = 0.41$years

நிலையான விலகல்
தனிப்பட்ட தொடர்

ஒரு நிறுவனத்தின் 10 ஊழியர்களின் வருமானத்தின் பின்வரும் தரவைக் கணக்கிடும் நிலையான விலகல்

மாத வருமானம்	600	620	640	620	680	670	680	640	700	650

தீர்வு

எக்ஸ்	**X=X-⁻X**	**எக்ஸ்2**
600 620 640 620 680 670 680 640 700 650	-50 -30 -10 -30 30 20 30 -10 50 0	2500 900 100 900 900 400 900 100 2500 0
$\sum X$ = 6500		**$\sum X^2$ ==9200**

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{6500}{10} = 650$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum X^2}}{30.3N} = \sqrt{9200 / 10} = 30.3 = \sigma$$

தனித்துவமான தொடர்

பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து நிலையான விலகலைக் கணக்கிடவும்

மதிப்பெண்கள் (X)	10	20	30	40	50	60
எண் மாணவர்கள்(எஃப்)	8	12	20	10	7	3

X	**f**	**fx**	**x= X-$\bar{X}$= X-30.8**	**X^2**	**Fx^2**
10	8	80	-20.8	432.64	3461.12
20	12	240	-10.8	116.64	1399.68
30	20	600	-0.8	0.64	12.80
40	10	400	9.2	84.64	846.40
50	7	350	19.2	368.64	2580.48
60	3	180	29.2	852.64	2557.92
	N=60	**$\sum$fX=1850**			**$\sum Fx^2$ =10858.40**

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{N} = \frac{1850}{60} = 30.5$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum fX^2}}{N} = \sqrt{10858.40 / 60} = 13.5 = \sigma$$

தொடர்ச்சியான தொடர்

பின்வரும் தரவிலிருந்து நிலையான விலகலைக் கணக்கிடவும்

வர்க்கம்	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
அதிர்வெண்	5	8	15	16	6

தீர்வு

வர்க்கம்	நடுப்புள்ளி	அதிர்வெண்	எக்ஸ்-ஏ d= -------- - C	ஈ 2	fd	Fd^2
0-10 10-20 20-30 30-40 40-50	5 15 25 35 45	5 8 15 16 6	-2 -1 0 1 2	4 1 0 1 4	-10 -8 0 16 12	20 8 0 16 24
		N=50			**$\sum fd=10$**	**$\sum fd^2=68$**

சராசரி A= 25வகுப்பு இடைவெளி C = 10 எனக் கருதப்படுகிறது

நிலையான விலகல் (கள்) =$\sqrt{}\sum$**fd^2- ($\sum$fd)^2**

SKEWNESS

அறிமுகம்

'Skewness' என்ற சொல் சமச்சீர் இல்லாமையைக் குறிக்கிறது, அதாவது, சமச்சீராகப் பரவும் போது அது ஒரு வளைந்த விநியோகம் என்று அழைக்கப்படுகிறது. இது நம்மை இயல்பான வளைவு அல்லது தரவு சமச்சீராக அல்லது சீராக விநியோகிக்கப்படுகிறது. சென்ட் ரிபாயிண்டின் இருபுறமும் பரவல் ஒரே மாதிரியாக இருக்கும், மீடியன் மற்றும் பயன்முறை அனைத்தும் ஒரே மதிப்பைக் கொண்டிருக்கும்.

வரையறை

‘வளைவு அல்லது சமச்சீர் என்பது ஒரு அதிர்வெண் விநியோகத்தின் பண்பு ஆகும்**--- சிம்சன் மற்றும் காஃப்கா**

ஒரு தொடர் சமச்சீரற்றதாக இருக்கும் போது அது சமச்சீரற்ற அல்லது வளைந்ததாக கூறப்படுகிறது

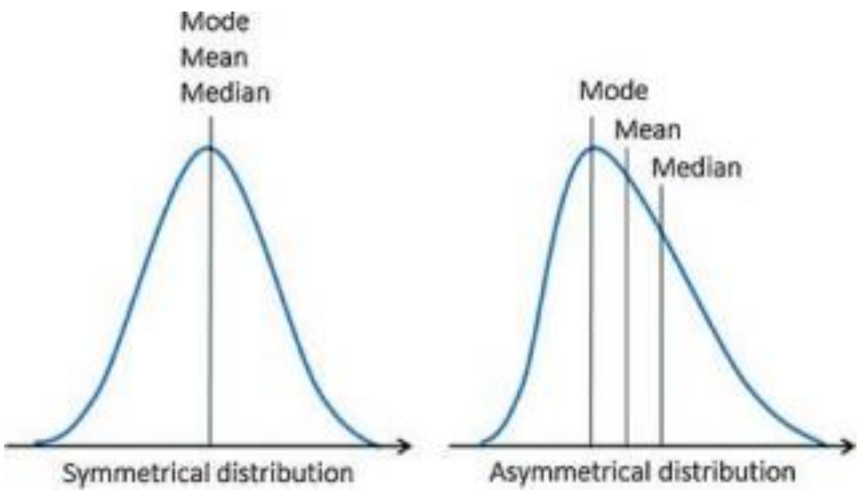
ஒரு விநியோகத்தின் க்ரோக்ஸ்டன் மற்றும் கௌடன் வளைவு

ஒரு விநியோகம் சமச்சீராக இல்லாதபோது அது ஒரு வளைந்த விநியோகம் என்று அழைக்கப்படுகிறது.
விநியோகத்தில் வளைவு இருப்பதை பகுப்பாய்வு செய்வது இரண்டு முக்கிய பணிகளைக் குறிக்கிறது. அவர்கள்

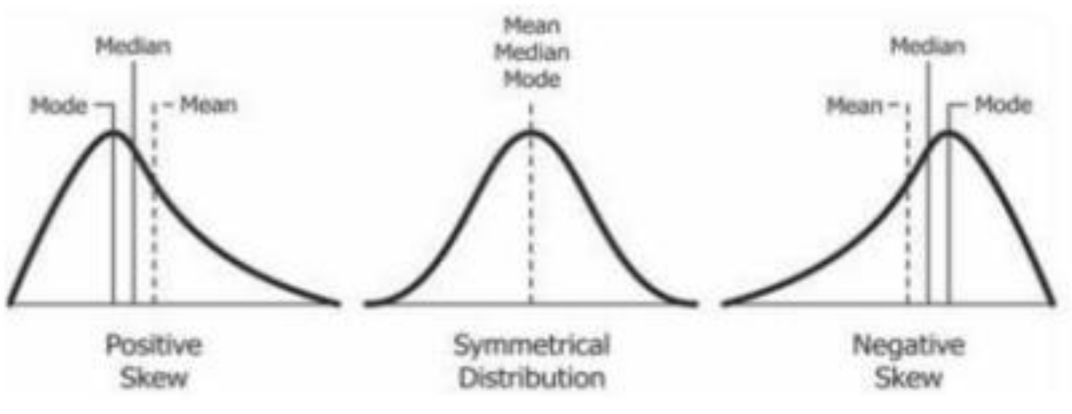
I. வளைவின் அடையாளத்தை தீர்மானித்தல் மற்றும் வளைவின் சோதனை மற்றும்
II.வளைவின் அளவை தீர்மானித்தல்

சமச்சீர் விநியோகம்

சமச்சீர் விநியோகத்தில், சராசரி, இடைநிலை மற்றும் பயன்முறையின் மதிப்புகள் ஒத்துப்போகின்றன. அதிர்வெண்களின் பரவல் வளைவின் மையப் புள்ளியின் இருபுறமும் ஒரே மாதிரியாக இருக்கும்.



வளைந்த விநியோகம்



சமச்சீராக இல்லாத ஒரு விநியோகம் வளைந்த விநியோகம் என்று அழைக்கப்படுகிறது, இது வளைந்த விநியோகம் என்று அழைக்கப்படுகிறது. இது நேர்மறையாக வளைந்த அல்லது எதிர்மறையாக வளைந்த விநியோகமாக இருக்கலாம்

I. நேர்மறை வளைந்த விநியோகம்

அதிர்வெண் விநியோகத்தில் நேர்மறை வளைந்த விநியோகத்தில் வளைவு உரிமைகளுக்கு நீண்ட வால் உள்ளது மற்றும் அதன் சராசரி மதிப்பு அதிகமாகவும், குறைந்த அளவாகவும் இருக்கும். இரண்டுக்கும் நடுவில் நடுநிலை உள்ளது. அதாவது $\bar{X} > M > Z$

II)எதிர்மறையாக வளைந்த விநியோகம்

அதிர்வெண் விநியோகத்தில், வளைவு இடதுபுறமாக நீண்ட வால் இருந்தால், அது எதிர்மறையாக வளைந்த விநியோகமாகும், இதில் பயன்முறையின் மதிப்பு அதிகமாகவும் சராசரி குறைவாகவும் இருக்கும். இரண்டுக்கும் நடுவில் நடுநிலை உள்ளது. அதாவது $\bar{X} < M < Z$

வளைவின் பல்வேறு நடவடிக்கைகள்

வளைவை முற்றிலும் அல்லது ஒப்பீட்டளவில் அளவிட முடியும். முற்றிலும் அளவீடுகள் வளைவின் அளவுகள் என்றும், ஒப்பீட்டு அளவீடுகள் வளைவின் இணை திறன் என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன

வளைவின் முழுமையான நடவடிக்கைகள்

I)கார்ல் பீசனின் வளைவின் குணகம்
ii)தி பவுலியின் கோ எஃபிஷியன்ட் ஆஃப் ஸ்கேவ்னஸ்
iii)கெல்லியின் வளைவின் குணகம்
iv)தருணங்களின் அடிப்படையில் வளைவின் அளவீடு

கார்ல் பியர்சனின் கோ-எஃபிஷியன்ட் ஆஃப் ஸ்கேவ்னஸ்

இந்த முறை சராசரி மற்றும் பயன்முறைக்கு இடையேயான வேறுபாட்டை அடிப்படையாகக் கொண்டது மற்றும் ஒப்பீட்டு அளவீடுகளை வழங்குவதற்கு வேறுபாடு நிலையான விலகலால் வகுக்கப்படுகிறது.

பவுலியின் வளைவின் குணகம்

அளவீடு காலாண்டுகளை அடிப்படையாகக் கொண்டது, சமச்சீர் விநியோகத்தில் முதல் மற்றும் மூன்றாவது காலாண்டுகள் இடைநிலையிலிருந்து சமமான தொலைவில் இருக்கும்.

வளைவின் நோக்கங்கள்

I)ஒரு தொடரில் சமச்சீரற்ற தன்மையின் திசை மற்றும் அளவைக் கண்டறிய.
II)வளைவுத்தன்மையுடன் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தொடர்களை ஒப்பிடுவதற்கு.
III)மைய மதிப்பைப் பற்றிய பொருட்களின் மாறுபாட்டின் தன்மையைப் படிக்க.

கார்ல் பியர்சன்ஸ் வளைவு குணகம்

பின்வரும் தரவுக்கான கார்ல் பியர்சனின் வளைவின் குணகத்தைக் கணக்கிடவும்

25	15	23	40	27	25	23	25	20

தீர்வு

அளவு பொருள்	விலகல் d=X A	டி2
25	-2	4
15	--12	144
23	-4	16
40	13	169
27	0	0
25	-2	4
23	-4	16
25	-2	4
20	-7	49
	∑d = -20	∑d2 = 406

∑d -29
‾X A + --------- = 27 + ------------- = 27 – 2.22 = 24.78
N 9

(σ)) =$\sqrt{\sum fd^2}$ / N - $(\sum fd)^2$ /N = √406 / 9 - (-20 /9)2

=√45.11 -$(2.2)^2$= 6.3

கொடுக்கப்பட்ட தொடரில், 25 மூன்று முறை மீண்டும் மீண்டும் செய்யப்படுகிறது
பயன்முறை 25 ஆகும்

X‾ - பயன்முறை 24.78 - 25
SKp = ------------------------ = ---------------- = σ = 6.3
0.03

பவுலியின் கோ-எஃபிஷியன்ட் ஆஃப் ஸ்கேவ்னஸ்

வளைவின் குணகத்தைக் கணக்கிடுங்கள்

வயது	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
எண் நபர்கள்	8	11	26	9	6

தீர்வு

வயது	**நபர்களின் எண்ணிக்கை (எஃப்)**	**cf**
0-10 10-20 20-30 30-40 40-50	8 11 26 9 6	8 19 45 54 60
	N = 60	

N/4 = 60/4 = 15 என்பது வகுப்பு இடைவெளி 10 - 20 க்கு இடையில் உள்ளது

$$Q1 = L + \frac{N/4 - cf}{F} \times C$$

$$= 10 + \frac{15 - 8}{11} \times 10 = 10 + \frac{7}{11} \times 10 = 10 + 6.36 = 16.36$$

Q3 = 3N /4 = 3 (60)/4 = 45 CL 20 -30 க்கு இடையில் உள்ளது

3N/4 - cf 45 - 19 28

Q3 = L + ------------------- X C = 20 + ---------------- X 10= 20 + 10

எஃப் 26 26

=20 + 10 = 30

N/2 = 60/2 = 30 CL 20 - 30 க்கு இடையில் உள்ளது

$$\text{இடைநிலை} = L + \frac{N/2 - cf}{F} \times C$$

30 - 19 11 110

= 20 + ------------- X 10 = 20 + ------ X 10 = 20 + -----

26 26 26

= 20 + 4.23 = 24.23

பவுலியின் இணை-திறமையான வளைவு

$$SKp = \frac{Q3+Q1-2Median}{Q3 - Q1} = \frac{30 + 16.36 - 2(24.23)}{30-16.36} = \frac{48.38 - 48.46}{13.64} = \frac{-2.1}{13.64}$$

=-0.15

கெல்லியின் கோ எஃபிஷியன்ட் ஆஃப் ஸ்கேவ்னஸ்

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தரவுகளில் இருந்து கெல்லியின் இணைத்திறனைக் கணக்கிடுங்கள்

Skewness Median =130
P 20 = 27

P 90 =242

தீர்வு

SKp = P90+ P10 – Median / P90 – P10 .

= 242 + 27 - (2 X 130) / 242 - 27

= 269 – 260 / 215

$$= \frac{9}{215} = 0.042$$

$= \sqrt{68/50 - (10/50)^2} X\ 10 = \sqrt{1.36 - (0.2)^2} X\ 10$

= 11.49

அலகு – IV – தொடர்பு

பொருள்

தொடர்பு என்பது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையிலான இயற்கையான உறவைப் பற்றிய ஆய்வு ஆகும். எனவே, இரண்டு புள்ளியியல் மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பைக் கண்டறிதல் மற்றும் பகுப்பாய்விற்கு இரண்டு மாறிகளின் மதிப்பாக இருக்கும் ஒவ்வொன்றும் ஜோடியாக அவதானிப்பை இணைக்கும் ஒருவித உறவு தேவை என்பதை கவனத்தில் கொள்ள வேண்டும்.

வரையறை

இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையே இருக்கும் உறவு ---ஸ்மித் தொடர்பு பகுப்பாய்வு இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையிலான தொடர்பைக் கையாள்கிறது. ---டியூட்

தொடர்புகளின் பயன்பாடுகள்

I)உடல் மற்றும் சமூக அறிவியலில் தொடர்பு மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும். வணிகம் மற்றும் பொருளாதாரம்II)விலை மற்றும் தேவைக்கு இடையிலான உறவைப் படிக்க பொருளாதாரத்தில் தொடர்பு பகுப்பாய்வு மிகவும் பயனுள்ளதாக இருக்கும்

III)செலவுகள், மதிப்பு, விலை மற்றும் பிற தொடர்புடைய மாறிகள் ஆகியவற்றை மதிப்பிடுவதற்கு வணிகத்திலும் இது பயனுள்ளதாக இருக்கும்IV)தொடர்பு என்பது பின்னடைவு என்ற கருத்தின் அடிப்படையாகும்

IN)தொடர்பு பகுப்பாய்வு ஒரு முறை மாதிரியை கணக்கிட உதவுகிறது.

தொடர்பு வகைகள்

- நேர்மறை தொடர்பு
- எதிர்மறை தொடர்பு
- எளிய தொடர்பு
- பல தொடர்புகள்
- பகுதி தொடர்பு
- நேரியல் தொடர்பு
- நேரியல் அல்லாத தொடர்பு

நேர்மறை தொடர்பு

இரண்டு மாறிகளின் மதிப்புகள் ஒரே திசையில் நகரும் போது தொடர்பு நேர்மறை என்று கூறப்படுகிறது, இதனால் ஒரு மாறியின் மதிப்பின் அதிகரிப்பு மற்ற

மாறியின் மதிப்பில் அதிகரிப்பு அல்லது ஒரு மாறியின் மதிப்பில் குறைவு ஆகியவற்றுடன் சேர்ந்துள்ளது. அதைத் தொடர்ந்து மற்ற மாறியின் மதிப்பு குறைகிறது.

எதிர்மறை தொடர்பு

இரண்டு மாறிகளின் மதிப்புகள் எதிரெதிர் திசையில் நகரும்போது தொடர்பு எதிர்மறையாகக் கூறப்படுகிறது, இதனால் ஒரு மாறியின் மதிப்புகள் அதிகரிப்பதைத் தொடர்ந்து மற்றொன்றின் மதிப்பு குறைகிறது மற்றும் நேர்மாறாகவும்

எளிய தொடர்பு

இரண்டு மாறிகள் மட்டுமே கூறப்பட்டால், அது எளிய தொடர்பு என்று கூறப்படுகிறது

பல தொடர்புகள்

இரண்டுக்கும் மேற்பட்ட மாறிகள் ஒரே நேரத்தில் கூறப்படும் போது, தொடர்பு பல

என்று கூறப்படுகிறது

பகுதி தொடர்பு

பகுதி தொடர்பு குணகம் ஒரு சார்பு மாறிக்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட சார்பற்ற மாறிக்கும் இடையிலான உறவின் அளவை வழங்குகிறது, இதில் சம்பந்தப்பட்ட மற்ற அனைத்து மாறிகளும் மகசூல் மற்றும் மழைப்பொழிவுக்கான நிலையான பகுப்பாய்வை வைத்திருக்கும் போது; இது எளிய தொடர்பு நேரியல் தொடர்பு தொடர்பான பிரச்சனையாகிறது. மாற்றத்தின் அளவு ஒரு மாறியாக இருந்தால், மற்றொன்றின் மாற்றத்தின் அளவிற்கு நிலையான விகிதத்தைத் தாங்க முனைகிறது.

நேரியல் அல்லாத தொடர்பு

ஒரு மாறியில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் அளவு மற்ற தொடர்புடைய மாறியில் ஏற்படும் மாற்றத்தின் அளவுக்கு ஏற்ற விகிதத்தைக் கொண்டிருக்கவில்லை என்றால், தொடர்பு நேரியல் அல்ல..

தொடர்புகளைப் படிக்கும் முறைகள்
வரைகலை முறை

➢சிதறல் வரைபடம்
➢எளிய வரைபட முறை

கணித முறைகள்

➢கார்ல் பியர்சனின் தொடர்புத் திறன்
➢ஸ்பியர்மேனின் தரவரிசை தொடர்பு குணகம்
➢ஒரே நேரத்தில் விலகல் முறை
➢குறைந்தபட்ச சதுர முறை

சிதறல் வரைபட முறை

இது இரண்டு தொடர்புடைய மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பைப் படிக்கும் ஒரு முறையாகும். X மற்றும் Y ஆகிய இரண்டு மாறிகள் ஒரு வரைபடத் தாளின் X மற்றும் Y அச்சுகளில் எடுக்கப்படும். X மற்றும் Y மதிப்புகளின் ஒவ்வொரு பகுதிக்கும், நாம் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கிறோம், மேலும் கண்காணிப்பின் எண்ணிக்கையைப் போல பல புள்ளிகளுக்குச் செல்கிறோம்.

வரைகலை முறை

இந்த முறையில் வரைபடத் தாளில் தனித் தொடர்களுக்கு வளைவுகள் வரையப்படுகின்றன. இரண்டு வளைவுகளின் திசை மற்றும் நெருக்கத்தை ஆராய்வதன் மூலம், உடனடி மாறுபாடுகள் தொடர்புடையதா என்பதை நாம் வழங்க முடியும். இரண்டு வளைவுகளும் ஒரே திசையில் நகர்ந்தால் தொடர்பு நேர்மறை என்று கூறப்படுகிறது. மாறாக, வளைவுகள் எதிர் திசையில் நகர்ந்தால் எதிர்மறை என்று கூறப்படுகிறது.

கார்ல் பியர்சனின் தொடர்புத் திறன்

கார்ல் பியர்சன், ஒரு சிறந்த புள்ளியியல் நிபுணர், இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையிலான உறவின் அளவை அளவிடுவதற்கான ஒரு கணித முறையை அறிமுகப்படுத்தினார். இந்த முறை. பியர்சன் குணகம் என்று அறியப்படுவது பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இது "r' என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது.

ஸ்பியர்மேனின் தரவரிசை தொடர்பு இணை திறன்

1904 ஆம் ஆண்டில், பிரபல பிரிட்டிஷ் உளவியலாளர் சார்லஸ் எட்வர்ட் ஸ்பியர்மேன், தரவரிசையின் இணை-திறன் முறையைக் கண்டுபிடித்தார். ரேங்க் தொடர்பு தனிப்பட்ட கவனிப்புக்குப் பொருந்தும். இந்த நடவடிக்கை தரமான பண்புகளை கையாள்வதில் பயனுள்ளதாக இருக்கும். தரவரிசை முறையைப் பயன்படுத்தி முடிவு தோராயமாக மட்டுமே இருக்கும்.

ஒரே நேரத்தில் விலகல் முறை

இந்த முறையின் கீழ், X மாறி மற்றும் y மாறியின் மாற்றத்தின் திசையானது ஒவ்வொரு காலத்திற்கான விலகலைக் கண்டறிய கணக்கில்

எடுத்துக்கொள்ளப்படும், மாறியின் மதிப்பில் ஏற்படும் மாற்றம் அதன் முந்தைய மதிப்பாக இருக்கலாம், இது + அல்லது -

தொடர்புகளின் இணை செயல்திறன்

கார்ல் பியர்சனின் தொடர்பு குணகத்தைக் கண்டறியவும்

X	6	2	10	4	8
Y	9	11	5	8	7

தீர்வு

X	**Y**	**X^2**	**Y^2**	**XY**
6	9	36	81	54
2	11	4	121	22
10	5	100	25	50
4	8	16	64	32
8	7	64	49	56
30	40	220	340	214

தொடர்பு குணகம் = $\dfrac{N\sum XY-(\sum X)(\sum y)}{\sqrt{N\sum X^{2}-(\sum x)^2}.\sqrt{N\sum Y^2-(\sum Y)^2}}$

$$r=\frac{(5X214)-(30X\ 40)}{\sqrt{5X220-(30)^2}\sqrt{5x340-(40)^2}}$$

$$r=\frac{(5X214)-(30X\ 40)}{\sqrt{5X220-(30)^2}\sqrt{5x340-(40)^2}}$$

$=-0.9194$.

கார்ல் பியர்சனின் தொடர்பு குணகம்:

கார்ல் பியர்சனின் தொடர்பு குணகத்தை கணக்கிடும் முறையானது, ஒரு தொடரில் உள்ள இரண்டு மாறிகளின் கோவேரியன்ஸ் அடிப்படையிலானது. இந்த முறை நடைமுறையில் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது மற்றும் தொடர்பு குணகம் "" என்ற குறியீட்டால் குறிக்கப்படுகிறது. ***"r"***. ஆய்வில் உள்ள இரண்டு மாறிகள் X மற்றும் Y எனில், கார்ல் பியர்சன் பரிந்துரைத்த பின்வரும் சூத்திரம் தொடர்புகளின் உறவின் அளவை அளவிடுவதற்குப் பயன்படுத்தப்படலாம்.

$$r = \frac{Covariance\ (x,y)}{S.D.(x)S.D.(y)} \qquad r = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x\,\sigma_y}$$

$$r = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n(\sum x^2) - (\sum x)^2]\,[n(\sum y^2) - (\sum y)^2]}} \qquad r = \frac{\sum XY}{\sqrt{\sum X^2 \sum Y^2}}$$

where
$X = x - \bar{x}$
$Y = y - \bar{y}$

$$r = \frac{\sum(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})}{\sqrt{\sum(X-\overline{X})^2}\sqrt{(Y-\overline{Y})^2}}$$

Where, $\overline{X}$ - mean of X variable
$\overline{Y}$ - mean of Y variable

$$r = \frac{\sum f(dx)(dy) - \frac{(\sum f dx)(\sum f dy)}{N}}{\sqrt{\sum(f dx)\wedge 2 - \frac{(\sum f dx)\wedge 2}{N}}\sqrt{\sum(dy)\wedge 2 - \frac{(\sum f dy)\wedge 2}{N}}}$$

$d_x = X - A$

$d_y = Y - A$

மேலே உள்ள வெவ்வேறு சூத்திரங்கள் சிக்கலில் கொடுக்கப்பட்ட தகவலைப் பொறுத்து வெவ்வேறு சூழ்நிலைகளில் பயன்படுத்தப்படலாம்.

பின்வரும் தகவல்களிலிருந்து கார்ல் பியர்சனின் தொடர்பு முறையின் குணகத்தைப் பயன்படுத்தி விளம்பரச் செலவுகள் மற்றும் விற்பனை அளவு ஆகியவற்றுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு குணகத்தைக் கண்டறியவும்.

நிறுவனம்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
விளம்பர எக்ஸ்பிரஸ். (ரூ. லட்சங்களில்)	11	13	14	16	16	15	15	14	13	13
விற்பனை அளவு (ரூ. லட்சங்களில்)	50	50	55	60	65	65	65	60	60	50

தீர்வு:

விளம்பரச் செலவுகள் மாறி X என்றும் விற்பனை அளவு Y என்றும் வைத்துக்கொள்வோம். கார்ல் பியர்சனின் தொடர்பு குணகத்தின் கணக்கீடு

நிறுவனம்	X	Y	x=X-Ẋ	x^2	y=Y-Ẏ	y^2	xy
1	11	50	-3	9	-8	64	24
2	13	50	-1	1	-8	64	8
3	14	55	0	0	-3	9	0
4	16	60	2	4	2	4	4
5	16	65	2	4	7	49	14
6	15	65	1	1	7	49	7
7	15	65	1	1	7	49	7
8	14	60	0	0	2	4	0
9	13	60	-1	1	2	4	-2
10	13	50	-1	1	-8	64	8
	140	**580**		**22**		**360**	**70**
	∑X	**∑ஓய்**		**∑x2**		**∑y2**	**∑xy**

X = ∑X = 140 / 10 = 14. Y = ∑Y = 580 / 10 = 58.

= 70 / √22*3 = 70 / 88.99 = 0.7866.

$$r = \frac{\sum XY}{\sqrt{\sum X^2 \sum Y^2}}$$

where

$X = x - \bar{x}$

$Y = y - \bar{y}$

விளக்கம்:மேற்கூறிய கணக்கீட்டில் இருந்து அதிக அளவு உள்ளது என்பது தெளிவாகிறது**நேர்மறை தொடர்பு.** அதாவது ***r*** **= 0.7866,**இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையில். அதாவது விளம்பரச் செலவுகள் அதிகரிப்பது விற்பனை அளவு அதிகரிக்க வழிவகுக்கிறது.

விளக்கம் 01:

கார்ல் பியர்சனின் தொடர்பு முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் மாணவர்களின் வயது மற்றும் விளையாடும் பழக்கங்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு குணகத்தைக் கண்டறியவும்.

வயது	15	16	17	18	19	20
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	250	200	150	120	100	80
வழக்கமான வீரர்கள்	200	150	90	48	30	12

தீர்வு:

மாணவர்களின் வயதுக்கும் விளையாட்டுப் பழக்கத்திற்கும் உள்ள தொடர்பைக் கண்டறிய, விளையாடும் பழக்கம் உள்ள மாணவர்களின் சதவீதத்தைக் கணக்கிட வேண்டும்.

விளையாடும் பழக்கத்தின் சதவீதம் = வழக்கமான வீரர்களின் எண்ணிக்கை / மொத்த மாணவர்களின் எண்ணிக்கை * 100

இப்போது, மாணவர்களின் வயது மாறி X மற்றும் விளையாடும் பழக்கத்தின் சதவீதம் மாறி Y என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

கார்ல் பியர்சனின் தொடர்பு குணகத்தின் கணக்கீடு

வயது (X)	**எண் மாணவர்கள்**	**வழக்கமான வீரர்கள்**	**சதவிதம்விளையாடுவது பழக்கவழக்கங்கள்(மற்றும்)**	**X - Ẋ**	**(X - Ẋ)^2**	**Y-Ẏ**	**(Y - Ẏ)^2**	**(X - Ẋ)(Y - Ẏ)**
15	250	200	80	-2.5	6.25	30	900	-75
16	200	150	75	-1.5	2.25	25	625	-37.5
17	150	90	60	-0.5	0.25	10	100	-5
18	120	48	40	0.5	0.25	-10	100	-5

19	100	30	30	1.5	2.25	-20	400	-30
20	80	12	15	2.5	6.25	-35	1225	-87.5
105			**300**		**17.5**		**3350**	**-240**
∑X			**∑ஒய்**		**∑x2**		**∑y2**	**∑xy**

X = ∑X / n = 105 / 7 = 17.5.

Y = ∑Y / n = 300 / 6 = 50.

r = ∑(X−Ẋ)(Y−Ẏ) / √∑(X−Ẋ)2∑(Y−Ẏ)2

r = -240 / √17.5 * 33 = -0.9912

விளக்கம்:மேற்கூறிய கணக்கீட்டில் இருந்து அதிக அளவு உள்ளது என்பது தெளிவாகிறது**எதிர்மறை தொடர்பு**அதாவது ***r* = -0.9912,**வயது மற்றும் விளையாடும் பழக்கம் ஆகிய இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையே. அதாவது வயது அதிகரிக்கும் போது மாணவர்களிடையே விளையாடும் பழக்கம் குறைகிறது.

விளக்கம் 02:

கார்ல் பியர்சனின் குணகம் பயன்படுத்தப்படும் மூலதனத்திற்கும் பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து பெறப்பட்ட லாபத்திற்கும் இடையிலான தொடர்புகளைக் கண்டறியவும்.

மூலதனம் (ரூ. கோடியில்)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
லாபம் (ரூ. கோடியில்)	2	4	8	5	10	15	14	20	22	50

தீர்வு:

பயன்படுத்தப்படும் மூலதனம் மாறி X மற்றும் லாபம் மாறி Y என்று வைத்துக்கொள்வோம். கார்ல் பியர்சனின் தொடர்பு குணகத்தின் கணக்கீடு

எக்ஸ்	**மற்றும்**	**எக்ஸ்^{2}**	**மற்றும்^{2}**	**XY**
10	2	100	4	20
20	4	400	16	80

30	8	900	64	240
40	5	1600	25	200
50	10	2500	100	500
60	15	3600	225	900
70	14	4900	196	980
80	20	6400	400	1600
90	22	8100	484	1980
100	50	10000	2500	5000
550	**150**	**38500**	**4014**	**11500**
∑X	**∑ஒய்**	**$\sum X^2$**	**∑ஒய்^{2}**	**∑XY**

***r* =**<u>32,500</u>

√(82,500) (17,640)

$$r = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n(\sum x^2) - (\sum x)^2]\,[n(\sum y^2) - (\sum y)^2]}}$$

r **=**32,500

38148.3945

விளக்கம் 03:

***r* =**n∑XY−∑X ∑Y / √[n(∑X2) − (∑X)2][n(∑Y2) - (∑Y)2]

r =(10∗11500) - (550∗150) √[(10∗38500)-(550^2)] [(10∗4014)−(150^2)]

***r* =**(1,15,000) - (82,500) / √[(3,85,000)−(3,02,500)] [(40,140)−(22,500)] **=**<u>32,500</u>

√1455300000

= 0.8519

மாறி X மற்றும் Yobக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு குணகத்தைக் கணக்கிடும் போது ஒரு கணினி பின்வரும் முடிவுகளைப் பெற்றது:

N = 30; $\sum X$ = 120 $\sum X^2$ **=**600 $\sum Y$ = 90 $\sum Y^2$= 250 $\sum XY$ = 335 இருப்பினும், அது இரண்டு ஜோடி அவதானிப்புகளை நகலெடுத்தது: (X, Y) : (8, 10) (12, 7)

சரியான மதிப்புகள்: (X, Y) : (8, 12) (10, 8)

X மற்றும் Y இடையே உள்ள தொடர்பு குணகத்தின் சரியான மதிப்பைப் பெறவும்.

தீர்வு:

Correct	$\sum X$	=	120–8–12+8+10	=	118
Correct	$\sum X^2$	=	$600-8^2-12^2+8^2+10^2$		
		=	600–64–144 +64+100	=	556
Correct	$\sum Y$	=	90–10–7+12+8	=	93
Correct	$\sum Y^2$	=	$250-10^2-7^2+12^2+8^2$		
		=	250–100–49 +144+64	=	309
Correct	$\sum XY$	=	335–(8*10)– (12*7)+ (8*12) +(10*8)		
		=	335–80–84+96+80	=	347

$$\boldsymbol{r} = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{[n(\sum X2) - (\sum X)2][n(\sum Y2) - (\sum Y)2]}}$$

$$\boldsymbol{r} = \frac{(30*347)-(118*93)}{\sqrt{[(30*556)-(118^2)]\,[(30*309)-(93^2)]}}$$

R = -0.4311.

எனவே, X மற்றும் Y இடையே உள்ள தொடர்பு குணகத்தின் சரியான மதிப்பு -0.4311 இன் மிதமான எதிர்மறை தொடர்பு ஆகும்.

விளக்கம் 04:

X மற்றும் Y இடையே உள்ள தொடர்பு குணகம் 0.3. அவற்றின் இணைநிலை 9. X இன் மாறுபாடு 16. Y தொடரின் நிலையான பக்தியைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட தகவல்:

r= 0.3 Cov (X, Y) = 9 Var (X) = 16

$$r = \frac{Co(X,Y)}{\sqrt{Var(X) * Var(Y)}}$$

எனவே Y தொடரின் நிலையான விலகல் = σ(Y) = 7.5

விளக்கம் 05:

கொடுக்கப்பட்ட பகுதியில் சீரற்ற முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட குடும்பங்களின் சராசரி சம்பளத்தை X மற்றும் பொழுதுபோக்கிற்கான சராசரி செலவைக் குறிக்கும் வகையில், பின்வரும் இருவழி அட்டவணையில் இருந்து தொடர்பு குணகத்தைக் கணக்கிடுங்கள்.

சராசரி சம்பளத்திற்கான செலவு (ரூ. 000) பொழுதுபோக்கு (ரூ. 000)

Entertainment(Rs.'000)	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
0 –10	5	4	5	2	4
10 –20	2	7	3	7	1

20 –30	-	6	-	4	5
30 –40	8	-	4	-	8
40 –50	-	7	3	5	10

தீர்வு:

சராசரி சம்பளம் X மாறி, பொழுதுபோக்கிற்கான செலவு மாறி Y என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

தொகுக்கப்பட்ட தரவுகளின் விஷயத்தில், கார்ல் பியர்சனின் தொடர்பு குணகத்தைக் கணக்கிட, சராசரியாகக் கருதப்படும் முறையைப் பின்பற்ற வேண்டும். தொடர்பைக் கணக்கிட பின்வரும் படிகள் பின்பற்றப்படுகின்றன.

1.மாறி X மற்றும் Y க்கான வகுப்பு இடைவெளிகளின் நடுப்புள்ளியை அடையாளம் காணவும்.

2. X மற்றும் Y இரண்டிற்கும் மேலே அடையாளம் காணப்பட்ட நடுப் புள்ளியில் இருந்து ஒரு அனுமான சராசரியைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

3.மேலும் எளிமைப்படுத்த, அனுமான சராசரியிலிருந்து விலகல் ஒரு பொதுவான காரணி மூலம் விலகலைப் பிரிப்பதன் மூலம் கணக்கிடப்படுகிறது.

4.அதிர்வெண்களை (f) கணக்கிட, கலத்தில் வரிசை வாரியாக மற்றும் நெடுவரிசை வாரியாக மதிப்புகளைச் சேர்க்கவும். வரிசை வாரியான அல்லது நெடுவரிசை வாரியான கூட்டுத்தொகை N இன் மதிப்பைக் குறிக்கிறது.

5.ஒவ்வொரு கலத்திலும் dx மற்றும் dy மற்றும் தொடர்புடைய அதிர்வெண்களை (f) பெறவும். fdxdy இன் மதிப்பைக் குறிக்கும் ஒவ்வொரு கலத்தின் வலது மூலையில் பெறப்பட்ட உருவத்தை எழுதவும்.

Y	**X**	**100-150**	**150–200**	**200–250**	**250–300**	**300–350**	**f**	**dy**	**fdy**	**fdy^2**	**fdxdy**
	MidPoint	**125**	**175**	**225**	**275**	**325**					
0–10	**5**	**20** **5**	**8** **4**	**0** **5**	**-4** **2**	**-16** **4**	20	-2	-40	80	8

10–20	**15**	**2** (**4**)	**7** (**7**)	**3** (**0**)	**7** (**-7**)	**1** (**-2**)	20	-1	-20	20	2
20–30	**25**	**-** (**-**)	**6** (**0**)	**-** (**-**)	**4** (**0**)	**5** (**0**)	15	0	0	0	0
30–40	**35**	**8** (**- 16**)	**-** (**-**)	**4** (**0**)	**-** (**-**)	**8** (**16**)	20	1	20	20	0
40–50	**45**	**-** (**-**)	**7** (**- 14**)	**3** (**0**)	**5** (**10**)	**10** (**40**)	25	2	50	100	36
f		15	24	15	18	28	**100 =N**		**10**	**220**	**46**
dx		-2	-1	0	1	2			**∑fdy**	**$∑fdy^2$**	**∑fdx dy**
fdx		-30	-24	0	18	56	20	**∑fdx**			
fdx^2		60	24	0	18	112	214	**$∑fdx^2$**			
fdxdy		8	1	0	-1	38	46	**∑fdxdy**			

dx = தொடர் X-ன் நடுப் புள்ளி – X தொடரின் சராசரி = MP(X) - 225dy = தொடர் Y-ன் நடுப் புள்ளி – Y தொடரின் சராசரி = MP(Y) – 25

$$r = \frac{n\sum f dxdy - \sum fdx \sum fdy}{\sqrt{[n(\sum f dx^2) - (\sum f dx)^2][n(\sum f dy^2) - (\sum f dy)^2]}}$$

$= (100*46)-(20*10) / \sqrt{[(100*214)-(20)^2] [(100*220) – (10)2]}$

$$r = \frac{(4,600)-(200)}{\sqrt{[21,400 - 400][22,000 - 100]}}$$

= 4400 / 21,445.2792 = 0.2052.

விளக்கம்:மேற்கூறிய கணக்கீட்டில் இருந்து குறைந்த அளவு உள்ளது என்பது தெளிவாகிறது**நேர்மறை தொடர்பு**அதாவது ***r*= 0.2052,**சம்பளம் மற்றும் செலவு ஆகிய இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையில். வருமானத்தின் சராசரி சம்பளம் பொழுதுபோக்கு செலவினங்களில் சிறிது அல்லது குறைந்த செல்வாக்கைக் கொண்டுள்ளது.

தரவரிசை தொடர்பு

ஸ்பியர்மேனின் தரவரிசை குணகம் தொடர்பு:

பெண்களின் அழகு, தலைமைத் திறன், ஆளுமை அறிவு போன்றவற்றில் மாறிகளை அளவிடுவது கடினமாக இருக்கும் போது, 1904 ஆம் ஆண்டில் பிரிட்டிஷ் உளவியலாளர் சார்லஸ் எட்வர்ட் ஸ்பியர்மேன் உருவாக்கிய இந்த தரவரிசை தொடர்பு முறை பயனுள்ளதாக இருக்கும். அல்லது இறங்கு வரிசை. இந்த ஒதுக்கப்பட்ட இரண்டு தொடர் வரிசைகளுக்கு இடையிலான தொடர்பு குணகம் பிரபலமாக "ஸ்பியர்மேனின் தரவரிசை தொடர்பு" என்று அழைக்கப்படுகிறது, மேலும் "***R*”**.

இந்த முறையின் கீழ் தொடர்பைக் கண்டறிய, பின்வரும் சூத்திரம் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

$$R = 1 - \frac{6\sum D^2}{N^3 - N}$$

இங்கே, D =இரண்டு தொடர்களில் இணைக்கப்பட்ட உருப்படிகளுக்கு இடையே உள்ள தரவரிசைகளின் வேறுபாடு.

N = அணிகளின் ஜோடிகளின் எண்ணிக்கை

ரேங்க் அல்லது சம ரேங்க்களில் டை ஏற்பட்டால்:

சில சந்தர்ப்பங்களில், இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட உறுப்புகள் அல்லது தனிப்பட்ட அல்லது உள்ளீடுகளுக்கு ஒரே தரவரிசையை ஒதுக்குவது அவசியமாக இருக்கலாம். அத்தகைய சூழ்நிலையில், ஒவ்வொரு நபருக்கும் ஒரு நுழைவு அல்லது நுழைவு வழங்குவது வழக்கம்சராசரி தரவரிசை. எடுத்துக்காட்டாக, இரண்டு நபர்கள் 5 க்கு சமமாக இருந்தால்வது இடம், பின்னர் அவை இரண்டும் பொதுவான ரேங்க் (5+6)/2 = உடன் ஒதுக்கப்படும் 5.5 மற்றும் மூன்று பேர் 5 வது இடத்தில் இருந்தால்வது இடம், பின்னர் அவர்களுக்கு (5+6+7)/3 = 6 என்ற ரேங்க் வழங்கப்படுகிறது. இதன் பொருள்

இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட நபர்கள் சமமாக வரிசைப்படுத்தப்பட வேண்டிய இடத்தில், தொடர்பு குணகத்தைக் கணக்கிடும் நோக்கத்திற்காக ஒதுக்கப்பட்ட தரவரிசையின் சராசரி இந்த தனிநபர்கள் அல்லது உருப்படிகள் அல்லது உள்ளீடுகள் ஒன்றுக்கொன்று சற்று வித்தியாசமாக இருந்திருந்தால் கிடைத்திருக்கும்.

சில உள்ளீடுகளுக்கு சம ரேங்க்கள் ஒதுக்கப்பட்டால், ஒரு சரிசெய்தல் காரணி சேர்க்கப்பட வேண்டும்மதிப்பு $6\sum D^2$தரவரிசைக் குணகத் தொடர்பைக் கணக்கிடுவதற்கு மேலே உள்ள சூத்திரத்தில். இந்த சரிசெய்தல் காரணி ஒவ்வொரு ரேங்கிற்கும் மீண்டும் சேர்க்கப்பட வேண்டும்.

Adjustmentfactor=$\frac{1}{12}(m1^3-m1)$where,m=numberofitemswhoserankarecommon

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு குறிப்பிட்ட ரேங்க் இரண்டு முறை திரும்பினால் m=2 மற்றும் அது மூன்று முறை திரும்பினால் m= 3 மற்றும் பல.

எனவே மேலே உள்ள சூத்திரத்தை பின்வருமாறு மீண்டும் எழுதலாம்:

$6*[\sum D^2+\frac{1}{12}(m^3-m)+\frac{1}{12}(m^3-m)+\frac{1}{12}(m^3-m)+\ldots\ldots]$

ஆர் = 1 – $\frac{}{N-N}$

விளக்கம் 01:

ஒரு கல்லூரியில் பட்டதாரி மாணவர்களின் செயல்திறனை மதிப்பீடு செய்யும் இரண்டு வகையான ஸ்பியர்மேனின் தொடர்பு குணகத்தைக் கண்டறியவும்.

மாணவர்களின் பெயர்	A	B	C	D	E	F	G	H	I
உள் தேர்வு	51	68	73	46	50	65	47	38	60
வெளிப்புற தேர்வு	49	72	74	44	58	66	50	30	35

தீர்வு:

ஸ்பியர்மேனின் ரேங்க் குணகம் தொடர்புகளின் கணக்கீடு

பெயர்	உள் தேர்வு	தரவரிசைகள் (R1)	வெளி தேர்வு	தரவரிசைகள் (R2)	D = R1 - R2	D2
A	51	5	49	6	-1	1
B	68	2	72	2	0	0

C	73	1	74	1	0	0
D	46	8	44	7	1	1
E	50	6	58	4	2	4
F	65	3	66	3	0	0
G	47	7	50	5	2	4
H	36	9	30	9	0	0
I	60	4	35	8	-4	16
$\sum D^2$=						**26**

= R = 1- 6$\sum D^2$

= 1-0.2167

= 0.7833.

விளக்கம்:மேற்கூறிய கணக்கீட்டில் இருந்து அதிக அளவு உள்ளது என்பது தெளிவாகிறது**நேர்மறை தொடர்பு**அதாவது**ஆர் = 0.7833,**இரண்டு தேர்வுகளுக்கு இடையில். மாணவர்களின் அகத்தேர்வுக்கும் வெளித் தேர்வுக்கும் இடையே அதிக அளவு நேர்மறையான தொடர்பு உள்ளது என்று அர்த்தம்.

விளக்கம் 02:

புள்ளியியல் மற்றும் கணக்கியலில் 10 மாணவர்கள் பெற்ற மதிப்பெண்களின் தரவரிசை தொடர்பு குணகம் 0.8 ஆகக் காணப்பட்டது. ஒரு மாணவர் பெற்ற இரண்டு பாடங்களில் ரேங்க் வித்தியாசம் 9 க்கு பதிலாக 7 ஆக தவறாக எடுக்கப்பட்டது என்பது பின்னர் கண்டறியப்பட்டது. தரவரிசை தொடர்புகளின் சரியான குணகத்தைக் கண்டறியவும்.

தீர்வு:

R = 1-6$\sum$D 2/3 = 1-0.8 = 990

ஆனால் இது சரியல்ல $\sum D^2$ எனவே நாம் சரியான மதிப்பை சரியாக கணக்கிட வேண்டும்

$\sum D^2 = 33 - 7^2 + 9^2 = 65$

எனவே, தொடர்பு குணகத்தின் சரியான மதிப்பு:

ஆர் = 1 - $6\sum D2$ = 1 – $6_* 65$ = 1 - 390 = 1 - 0.394 = 0.606.

விளக்கம் 03: அழகுப் போட்டியில் பத்து போட்டியாளர்கள் பின்வரும் வரிசையில் மூன்று நடுவர்களால் வரிசைப்படுத்தப்படுகிறார்கள்:

1நீதிபதி	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
2நீதிபதி	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
3 நீதிபதி	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

எந்த ஜோடி நீதிபதிகள் அழகில் பொதுவான ரசனைகளை நெருங்குகிறார்கள் என்பதைத் தீர்மானிக்க, தரவரிசை தொடர்பு குணகத்தைப் பயன்படுத்தவும்.

தீர்வு:

எந்த ஜோடி நீதிபதிகள் பொதுவான ரசனைகள் அழகுக்கு அருகில் உள்ள அணுகுமுறையைக் கொண்டுள்ளனர் என்பதைக் கண்டறிய, நாங்கள் தீர்ப்புகளுக்கு இடையே உள்ள தரவரிசை தொடர்பை ஒப்பிடுகிறோம்.

1.1நீதிபதி மற்றும் 2nd நீதிபதி

2.2nd நீதிபதி மற்றும் 3rd நீதிபதி

3.1நீதிபதி மற்றும் 3rd நீதிபதி

ஸ்பியர்மேனின் ரேங்க் குணகம் தொடர்புகளின் கணக்கீடு

தரவரிசை 1 **நீதிபதி (R1)**	**தரவரிசை2nd நீதிபதி (R2)**	தரவரிசை 3வது **நீதிபதி (R3)**	$D^2=(R1-R2)^2$	$D^2=(R2-R3)^2$	$D^2=(R1-R3)^2$
1	3	6	4	9	25
6	5	4	1	1	4
5	8	9	9	1	16
10	4	8	36	16	4
3	7	1	16	36	4
2	10	2	64	64	0

4	2	3	4	1	1
9	1	10	64	81	1
7	6	5	1	1	4
8	9	7	1	4	1
N = 10	**N = 10**	**N = 10**	**$\sum D^2$ = 200**	**$\sum D^2$ = 214**	**$\sum D^2$ = 60**

1. 1நீதிபதி மற்றும் 2^{nd}நீதிபதி
   = 1-1200/990 = 1-1.2121 = 0.2121.

2^{nd}நீதிபதி மற்றும் 3^{rd}நீதிபதி

= 1-1284 / 990 = 1-1.297 = 0.297.

3.1நீதிபதி மற்றும் 3^{rd}நீதிபதி

= 1- 360 / 990 = 1-0.3636 = 0.6364.

விளக்கம்:மேற்கூறிய கணக்கீட்டிலிருந்து, முதல் மற்றும் மூன்றாவது நீதிபதிகளின் தீர்ப்பில் தொடர்பு குணகம் நேர்மறையாக இருப்பதைக் காணலாம். எனவே, முதல் மற்றும் மூன்றாவது நீதிபதிகள் அழகுக்கான பொதுவான சுவைகளுக்கு மிக நெருக்கமான அணுகுமுறையைக் கொண்டுள்ளனர் என்று முடிவு செய்யலாம்.

விளக்கம் 04:

பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து, தரவரிசை தொடர்பைக் கணக்கிடுங்கள்.

எக்ஸ்	82	68	75	61	68	73	85	68
மற்றும்	81	71	71	68	62	69	80	70

தீர்வு:

பிரச்சனையில் வரிசைகள் மீண்டும் மீண்டும் இருப்பதைக் காண்கிறோம். X = 68 இன் மதிப்பு 3 முறையும், Y = 71 இன் மதிப்பு 2 முறையும் திரும்பத் திரும்ப வருகிறது. எனவே, மதிப்பில் சேர்க்கப்படும் சரிசெய்தல் காரணியை நாம் கணக்கிட வேண்டும்$\sum D^2$.

ஸ்பியர்மேனின் ரேங்க் குணகம் தொடர்புகளின் கணக்கீடு

X	Y	R1	R2	D=R1–R2	D^2
82	81	2	1	1	1
68	71	6	3.5	2.5	6.25
75	71	3	3.5	-0.5	0.25
61	68	8	7	1	1
68	62	6	8	-2	4
73	69	4	6	-2	4
85	80	1	2	-1	1
68	70	6	5	1	1
∑D2					**18.5**

6∗[∑D^2+<u>1</u>(மீ^{3} −m)+<u>1</u>

(மீ^{3} −m)]

ஆர் = 1 –<u>12 12</u>

N-N

மதிப்பு X மூன்று முறை திரும்பும்போது, m=3, சரிசெய்தல்

காரணி (1) =<u>1</u>(3^3-3) =1

மதிப்பு Y இரண்டு முறை திரும்பும்போது, m=2,

* (27-3) =1

* 24 = 2

சரிசெய்தல் காரணி (2) = $\frac{1}{}(2^3$-2) = ^{1}*(8-2) = ^{1}* 6 =

R = 1 – $^{6*[18.5 + 2 + .5]}$ = 1

-6*21

8^3 – 8512– 8

= 1 –^{126}= 1 - 0.25 =**0.75**

ஸ்பியர்மேனின் ரேங்க் குணகம் = 0.75, இது உயர்தர நேர்மறை தொடர்பு இருப்பதைக் குறிக்கிறது.

தொடர்பு குணகத்தின் பண்புகள்:

1.தொடர்பு குணகம் எப்போதும் – 1 முதல் +1 வரை இருக்கும், குறியீட்டு ரீதியாக இதை – 1 ≤ r≤ 1 என எழுதலாம்.

2.தொடர்பு குணகம் தோற்றம் மற்றும் அளவின் மாற்றத்திலிருந்து சுயாதீனமாக உள்ளது.3.தொடர்பு குணகம் ஒரு தூய எண் மற்றும் அளவீட்டு அலகுகளிலிருந்து சுயாதீனமாக உள்ளது. அதாவது X என்பது உயரத்தை அங்குலத்திலும், Y என்பது கிலோவில் எடையையும் கூறினால், தொடர்பு குணகம் அங்குலமாகவோ அல்லது கிலோவாகவோ இருக்காது, ஆனால் ஒரு தூய எண்ணாக மட்டுமே இருக்கும்.

4.தொடர்பு குணகம் என்பது இரண்டு பின்னடைவு குணகத்தின் வடிவியல் சராசரி, குறியீடாக r = √bxy∗byx

5.X மற்றும் Y ஆகியவை சுயாதீன மாறிகள் என்றால், தொடர்பு குணகம்

பூஜ்ஜியமாகும். அழகு போட்டியில் இரண்டு நடுவர்கள் 12 உள்ளீடுகளை பின்வருமாறு தரவரிசைப்படுத்துகின்றனர்

X	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
Y	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

தரவரிசை X	தரவரிசை Y	D=R(X)-(Y)	D^2
1	6	-5	25
6	4	2	4
5	9	-4	16
10	8	2	4
3	1	2	4
2	2	0	0
4	3	1	1
9	10	-1	1
7	5	2	4
8	7	1	1
N=10			$\sum D^2 = 60$

பின்னடைவு

தொடர்புடைய மாறிகளுக்கு இடையிலான உறவை அளவிடும் ஒரு ஆய்வு, இதில் ஒரு மாறி மற்றொரு சார்பற்ற மாறியைச் சார்ந்தது, இது பின்னடைவு என அழைக்கப்படுகிறது. இது 1877 இல் சர் பிரான்சிஸ் கால்டன் என்பவரால் பெற்றோர் மற்றும் அவர்களது குழந்தைகளுக்கு இடையே உள்ள உயரத்தின் உறவை அளவிடுவதற்காக உருவாக்கப்பட்டது.

பின்னடைவு பகுப்பாய்வு என்பது இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையிலான செயல்பாட்டு உறவின் தன்மை மற்றும் அளவை ஆய்வு செய்வதற்கும், சார்பு மாறியின் அறியப்படாத மதிப்புகளை சுயாதீன மாறியின் அறியப்பட்ட மதிப்புகளிலிருந்து மதிப்பிடுவதற்கு (அல்லது

கணிக்க) ஒரு புள்ளிவிவர கருவியாகும்.

மற்றொரு மாறியை கணிக்க அடிப்படையாக இருக்கும் மாறியானது இன்டிபென்டன்ட் மாறி என்றும் கணிக்கப்படும் மாறி சார்பு மாறி என்றும் அழைக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, இரண்டு மாறிகள் விலை (X) மற்றும் தேவை (Y) ஆகியவை நெருங்கிய தொடர்புடையவை என்பதை நாம் அறிந்தால், கொடுக்கப்பட்ட Y இன் மதிப்புக்கு X இன் மிகவும் சாத்தியமான மதிப்பை அல்லது கொடுக்கப்பட்ட X இன் மதிப்புக்கு Y இன் மிகவும் சாத்தியமான மதிப்பைக் கண்டறியலாம். அதேபோல, ஒரு பொருளின் வரித் தொகைக்கும் விலை உயர்வுக்கும் நெருங்கிய தொடர்பு இருப்பதை அறிந்தால், ஒரு குறிப்பிட்ட அளவு வரி விதிப்புக்கு எதிர்பார்க்கப்படும் விலையைக் கண்டறியலாம்.

பின்னடைவு பகுப்பாய்வின் பயன்கள்:

1.இது சார்பற்ற மாறிகளின் மதிப்புகளிலிருந்து சார்பு மாறிகளின் மதிப்புகளின் மதிப்பீடுகளை வழங்குகிறது.

2.மதிப்பீட்டின் அடிப்படையில் பின்னடைவு கோட்டைப் பயன்படுத்துவதில் உள்ள பிழையின் அளவைப் பெற இது பயன்படுகிறது.

3.பின்னடைவு பகுப்பாய்வின் உதவியுடன், இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு அல்லது தொடர்பு அளவைப் பெறலாம்.

4.பொருளாதாரம் மற்றும் வணிக ஆராய்ச்சியில் இது மிகவும் மதிப்புமிக்க கருவியாகும், ஏனெனில் பொருளாதார பகுப்பாய்வின் பெரும்பாலான சிக்கல்கள் காரணம் மற்றும் விளைவு உறவை அடிப்படையாகக் கொண்டவை.

தொடர்பு மற்றும் பின்னடைவு இடையே வேறுபாடு

எண்	தொடர்பு	பின்னடைவு
1	இது மாறிகளுக்கு இடையிலான உறவின் அளவு மற்றும் திசையை அளவிடுகிறது.	இது தரவுகளின் அசல் அலகுகளின் அடிப்படையில் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளுக்கு இடையிலான சராசரி உறவின் தன்மை மற்றும் அளவை அளவிடுகிறது
2	இது மாறிகளுக்கு இடையிலான தொடர்பைக் காட்டும் ஒப்பீட்டு அளவீடு ஆகும்.	இது உறவின் முழுமையான அளவீடு.
3	தொடர்பு குணகம் தோற்றம் மற்றும் அளவு ஆகிய இரண்டின் மாற்றத்திலிருந்து சுயாதீனமாக உள்ளது.	பின்னடைவு குணகம் தோற்றத்தின் மாற்றத்திலிருந்து சுயாதீனமானது, ஆனால் அளவு அல்ல.
4	தொடர்பு குணகம் அளவீட்டு அலகுகளிலிருந்து சுயாதீனமானது.	பின்னடைவு குணகம் அளவீட்டு அலகுகளிலிருந்து சுயாதீனமாக இல்லை.
5	மாறிகளுக்கு இடையிலான உறவின் வெளிப்பாடு -1 வரை இருக்கும்	மாறிகளுக்கு இடையிலான உறவின் வெளிப்பாடு எந்த வகையிலும் இருக்கலாம்
	+1 செய்ய.	போன்ற வடிவங்களில்:ஒய் = a + bX $Y = a + bX + cX^2$

6	இது முன்னறிவிக்கும் சாதனம் அல்ல.	இது ஒரு முன்கணிப்பு சாதனமாகும், இது சுயாதீன மாறியின் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பிலிருந்து சார்பு மாறியின் மதிப்பைக் கணிக்கப் பயன்படுகிறது.
7	மனைவியின் எடை மற்றும் கணவரின் வருமானம் போன்ற பூஜ்ஜிய தொடர்பு இருக்கலாம்.	பூஜ்ஜிய பின்னடைவு என்று எதுவும் இல்லை.

பின்னடைவு கோடுகள் மற்றும் பின்னடைவு சமன்பாடு:

பின்னடைவு கோடுகள் மற்றும் பின்னடைவு சமன்பாடுகள் ஒத்ததாக பயன்படுத்தப்படுகின்றன. பின்னடைவு சமன்பாடுகள் பின்னடைவு கோடுகளின் இயற்கணித வெளிப்பாடு ஆகும். இரண்டு மாறிகளை நாம் பரிசீலிப்போம்: X & Y. y என்பது xஐச் சார்ந்து இருந்தால், விளைவு எளிய பின்னடைவு வடிவத்தில் வரும். இரண்டு மாறி X மற்றும் Yஐ எடுத்துக் கொண்டால், Y இல் X இன் பின்னடைவுக் கோடு மற்றும் X இல் Y இன் பின்னடைவுக் கோடு என இரண்டு பின்னடைவுக் கோடுகள் இருக்கும். X இன் மதிப்பு மற்றும் Y இல் X இன் பின்னடைவு வரியானது Y இன் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்புக்கு X இன் மிகவும் சாத்தியமான மதிப்பைக் கொடுக்கிறது. எனவே, எங்களிடம் இரண்டு பின்னடைவு கோடுகள் உள்ளன. இருப்பினும், சரியான நேர்மறை அல்லது சரியான எதிர்மறை தொடர்பு இருக்கும்போது இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையில், இரண்டு பின்னடைவு கோடு ஒத்துப்போகும், அதாவது நமக்கு ஒரு வரி இருக்கும். மாறிகள் சுயாதீனமாக இருந்தால், r என்பது பூஜ்ஜியம் மற்றும் பின்னடைவின் கோடுகள் செங்கோணத்தில் இருக்கும், அதாவது X அச்சு மற்றும் Y அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும்.

எனவே, எளிய நேரியல் பின்னடைவு மாதிரியின் உதவியுடன் பின்வரும் இரண்டு பின்னடைவு கோடுகள் உள்ளன

1. X இல் Y இன் பின்னடைவுக் கோடு: இந்த வரியானது X (சுயாதீன மாறி) இன் எந்த மதிப்பிற்கும் Y (சார்ந்த மாறி) இன் சாத்தியமான மதிப்பைக் கொடுக்கிறது. X இல் Y இன் பின்னடைவு வரி : $Y - \dot{Y} = byx (X - \dot{X})$ அல்லது:

Y = a + bX

2.Y இல் X இன் பின்னடைவு வரி: இந்த வரி X இன் சாத்தியமான மதிப்பை (சார்ந்த மாறி) வழங்குகிறது Y இன் ஏதேனும் கொடுக்கப்பட்ட மதிப்பு (சுதந்திர மாறி).

Y இல் X இன் பின்னடைவு வரி : X – Ẋ = bxy (Y – Ẏ) அல்லது: X = a + bY

மேலே உள்ள இரண்டு பின்னடைவு கோடுகள் அல்லது பின்னடைவு சமன்பாடுகளில், இரண்டு பின்னடைவு அளவுருக்கள் உள்ளன, அவை "a" மற்றும் "b" ஆகும். இங்கே "a" என்பது அறியப்படாத மாறிலி மற்றும் "b" என்பது "byx" அல்லது "bxy" என்றும் குறிக்கப்படுகிறது, இது மற்றொரு அறியப்படாத மாறிலியாக பிரபலமாக பின்னடைவு குணகம் என்று அழைக்கப்படுகிறது. எனவே, இந்த "a" மற்றும் "b" இரண்டு அறியப்படாத மாறிலிகள் (நிலையான எண் மதிப்புகள்) கோட்டின் நிலையை முழுமையாக தீர்மானிக்கின்றன. இரண்டின் மதிப்பு அல்லது இரண்டின் மதிப்பு மாற்றப்பட்டால், மற்றொரு வரி தீர்மானிக்கப்படுகிறது. "a" அளவுரு பொருத்தப்பட்ட கோட்டின் அளவை தீர்மானிக்கிறது (அதாவது நேரடியாக மேலே உள்ள கோட்டின் தூரம் அல்லது தோற்றத்திற்கு கீழே). "b" அளவுரு கோட்டின் சாய்வை தீர்மானிக்கிறது (அதாவது X இல் அலகு மாற்றத்திற்கான Y இன் மாற்றம்).

மாறிலிகளின் மதிப்புகள் "a" மற்றும் "b" பெறப்பட்டால், வரி முற்றிலும் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. ஆனால் இந்த மதிப்புகளை எவ்வாறு பெறுவது என்பது கேள்வி. குறைந்தபட்ச சதுரங்களின் முறையால் பதில் வழங்கப்படுகிறது. சிறிய இயற்கணிதம் மற்றும் வேறுபட்ட கால்குலஸ் மூலம், பின்வரும் இரண்டைக் காட்டலாம்***சாதாரண சமன்பாடுகள்***,ஒரே நேரத்தில் தீர்க்கப்பட்டால், "a" மற்றும் "b" அளவுருக்களின் மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

இரண்டு சாதாரண சமன்பாடுகள்:

XonY			YonX		
$\sum X$	=	$Na+b\sum Y$	$\sum Y$	=	$Na+b\sum X$
$\sum XY$	=	$a\sum Y+b\sum Y^2$	$\sum XY$	=	$a\sum X+b\sum X^2$

மேலே உள்ள இந்த முறை நேரடி முறை என்று பிரபலமாக அறியப்படுகிறது, இது X மற்றும் Y இன் மதிப்புகள் பெரியதாக இருக்கும்போது மிகவும் சிக்கலானதாக இருக்கும். X மற்றும் Y இன் உண்மையான மதிப்புகளைக் கையாள்வதற்குப் பதிலாக, X மற்றும் Yseries இன் விலகல்களை அந்தந்த வழிமுறைகளில் இருந்து எடுத்துக் கொண்டால்,

இந்த வேலையை எளிமைப்படுத்தலாம். அந்த வழக்கில்:

X இல் பின்னடைவு சமன்பாடு Y:

$Y = a + bX$ $(Y - \dot{Y}) = byx\,(X - \dot{X})$ ஆக மாறும்

பின்னடைவு சமன்பாடு X இல் Y:

$X = a + bY$ $(X - \dot{X}) = bxy\,(Y - \dot{Y})$ ஆக மாறும்

பின்னடைவு சமன்பாட்டின் இந்த புதிய வடிவத்தில், நாம் ஒரே ஒரு அளவுருவை மட்டுமே கணக்கிட வேண்டும், அதாவது "b". இந்த "b" என்பது "byx" அல்லது "bxy" என்றும் குறிக்கப்படுகிறது, இது பின்னடைவு குணகம் என அழைக்கப்படுகிறது.

பின்னடைவு குணகம்:

பின்னடைவு சமன்பாட்டில் உள்ள "b" அளவு பின்னடைவு குணகம் அல்லது சாய்வு குணகம் என அழைக்கப்படுகிறது. இரண்டு பின்னடைவு சமன்பாடுகள் இருப்பதால், நமக்கு இரண்டு பின்னடைவு குணகங்கள் உள்ளன.

1.Y இல் பின்னடைவு குணகம் X, குறியீடாக "bxy" என எழுதப்பட்டுள்ளது

2.X இல் பின்னடைவு குணகம் Y, குறியீடாக "byx" என எழுதப்பட்டுள்ளது

பின்னடைவு குணகங்களைக் கணக்கிடுவதற்கு வெவ்வேறு சூத்திரங்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன:

முறை	**RegressionCoefficientXonY**	**RegressionCoefficientYonX**
தொடர்பு குணகம் (r) மற்றும் நிலையான விலகல் (σ) ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்துதல்	$bxy = r\dfrac{\sigma x}{\sigma y}$	$byx = r\dfrac{\sigma y}{\sigma x}$
நேரடி முறை: எக்ஸ் மற்றும் ஒய் தொகையைப் பயன்படுத்துதல்	$bxy = \dfrac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2}$	$byx = \dfrac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{N\sum X^2 - (\sum X)^2}$
எண்கணித சராசரியிலிருந்து விலகல்கள் எடுக்கப்படும்போது	$bxy = \dfrac{\sum xy}{\sum y^2}$ where $x = X - \dot{X}$ and $y = Y - \dot{Y}$	$byx = \dfrac{\sum xy}{\sum x^2}$ where $x = X - \dot{X}$ and $y = Y - \dot{Y}$

பின்னடைவு குணகங்களின் பண்புகள்:

1.தொடர்பு குணகம் என்பது இரண்டு பின்னடைவு குணகங்களின் வடிவியல் சராசரி ஆகும். குறியீடாக $r = \sqrt{bxy*byx}$

2.பின்னடைவு குணகங்களில் ஒன்று ஒற்றுமையை விட அதிகமாக இருந்தால், மற்றொன்று ஒற்றுமையை விட குறைவாக இருக்க வேண்டும், ஏனெனில் தொடர்பு குணகத்தின் மதிப்பு ஒற்றுமையை மீற முடியாது. உதாரணமாக bxy = 1.2 மற்றும் byx = 1.4 “r” என்றால் = $\sqrt{1.2*1.4}$ = 1.29, இது சாத்தியமில்லை.

3.பின்னடைவு குணகம் இரண்டும் ஒரே அடையாளத்தைக் கொண்டிருக்கும். அதாவது அவை நேர்மறையாகவோ அல்லது எதிர்மறையாகவோ இருக்கும். வேறு வார்த்தைகளில் கூறுவதானால், பின்னடைவு குணகங்களில் ஒன்று கழித்தல் குறியையும் மற்றொன்று கூட்டல் குறியையும் கொண்டிருப்பது சாத்தியமில்லை.

4.தொடர்பு குணகம் பின்னடைவு குணகத்தின் அதே அடையாளத்தை கொண்டிருக்கும், அதாவது பின்னடைவு குணகம் எதிர்மறையான அடையாளமாக இருந்தால், "r" எதிர்மறையான அடையாளத்தையும் கொண்டிருக்கும், மேலும் பின்னடைவு குணகம் நேர்மறை அடையாளமாக இருந்தால், "r" நேர்மறையாக இருக்கும். உதாரணத்திற்கு, bxy = என்றால் -0.2 மற்றும் byx = -0.8 பின்னர் r = - $\sqrt{0.2*0.8}$ =**– 0.4**

5.இரண்டு பின்னடைவு குணகத்தின் சராசரி மதிப்பு, தொடர்பு குணகத்தின் மதிப்பை விட அதிகமாக இருக்கும். குறியீட்டில் (bxy + byx) / 2 > r. எடுத்துக்காட்டாக, bxy = 0.8 மற்றும் byx = 0.4 எனில், இரண்டு மதிப்புகளின் சராசரி = (0.8 + 0.4) / 2 = 0.6 மற்றும் r = r = $\sqrt{0.8}$ இன் மதிப்பு$*$0.4 = 0.566 இது 0.6 க்கும் குறைவானது

6.பின்னடைவு குணகங்கள் தோற்றத்தின் மாற்றத்திலிருந்து சுயாதீனமானவை, ஆனால் அளவு அல்ல.

விளக்கம் 01:

பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து Y இல் X மற்றும் X இல் Y இன் இரண்டு பின்னடைவு சமன்பாட்டைக் கண்டறியவும்:

X	:	10	12	16	11	15	14	20	22
Y	:	15	18	23	14	20	17	25	28

தீர்வு:

பின்னடைவு சமன்பாட்டின் கணக்கீடு

X	Y	X^2	Y^2	XY
10	15	100	225	150
12	18	144	324	216
16	23	256	529	368
11	14	121	196	154
15	20	225	400	300
14	17	196	289	238
20	25	400	625	500
22	28	484	784	616
120	**160**	**1,926**	**3,372**	**2,542**
$\sum X$	$\sum Y$	$\sum X^2$	$\sum Y^2$	$\sum XY$

இங்கே N = தொடர் X அல்லது தொடர் Y = 8 இல் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை

இப்போது நாம் சாதாரண சமன்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி பின்னடைவு சமன்பாடுகளைக் கணக்கிடுவோம்.

Y இல் X இன் பின்னடைவு சமன்பாடு: X = a + bY

இரண்டு சாதாரண சமன்பாடுகள்:

$$\sum X = Na + b\sum Y$$

$$\sum XY = a\sum Y + b\sum Y^2$$

மேலே உள்ள சாதாரண சமன்பாடுகளில் மதிப்புகளை மாற்றினால், நாம் பெறுகிறோம்

$$120 = 8a + 160b \; \ldots\ldots (i)$$

$$2542 = 160a + 3372b \; \ldots\ldots (ii)$$

இந்த சமன்பாடுகளை (i) மற்றும் (ii) ஒரே நேரத்தில் சமன்பாடு முறை மூலம் தீர்க்கலாம் (i) சமன்பாட்டை 20 ஆல் பெருக்கினால் 2400 = 160a + 3200b

கிடைக்கும்

இப்போது இந்த சமன்பாடுகளை மீண்டும் எழுதுகிறோம்:

2400 = 160a + 3200b

2542 = 160a + 3372b

(-) (-) (-).

-142 = -172b

எனவே இப்போது நம்மிடம் -142 = -172b உள்ளது, இதை 172b = 142 என மாற்றி எழுதலாம், b = ^{142}= 0.8256 / 176 (வட்டமானது)

சமன்பாட்டில் (i) b இன் மதிப்பை மாற்றினால், நாம் பெறுகிறோம்

120=8a+(160 * 0.8256)

120=8a+132 (வட்டமானது)

8a=120-132

8a=-12

a =-12/8

a =-1.5

எனவே a = -1.5 மற்றும் b = 0.8256 மதிப்புகளைப் பெற்றோம்

Y இல் X இன் தேவையான பின்னடைவு சமன்பாடு:

X = a + bY =>**X = -1.5 + 0.8256Y**

X இல் Y இன் பின்னடைவு சமன்பாடு: Y = a + bX

இரண்டு சாதாரண சமன்பாடுகள்:

$\sum Y = Na + b\sum X$

$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$

மேலே உள்ள சாதாரண சமன்பாடுகளில் மதிப்புகளை மாற்றினால், நாம் பெறுகிறோம்

160 = 8a + 120b ..... (iii)

2542 = 120a + 1926b ..... (iv)

இந்த சமன்பாடுகளை (iii) மற்றும் (iv) ஒரே நேரத்தில் சமன்பாடு முறை மூலம் தீர்க்கலாம் சமன்பாட்டை (iii) 15 ஆல் பெருக்கினால்

2400 = 120a + 1800b கிடைக்கும்

இப்போது இந்த சமன்பாடுகளை மீண்டும் எழுதுகிறோம்:

2400 = 120a + 1800b

2542 = 120a + 1926b

(-) (-) (-).

-142 = -126b

எனவே இப்போது நம்மிடம் -142 = -126b உள்ளது,

இதை 126b = 142 என மாற்றி எழுதலாம், b = ^{142}= 1.127 /

126 (வட்டமானது)

சமன்பாட்டில் (iii) b இன் மதிப்பை மாற்றினால், நாம் பெறுகிறோம்

160=8a+(120 * 1.127)

160=8a+135.24

8a=160-135.24

8a=24.76

a =24.76/8

a =3.095

எனவே a = 3.095 மற்றும் b = 1.127 மதிப்புகளைப் பெற்றோம்

X இல் Y இன் தேவையான பின்னடைவு சமன்பாடு:

Y = a + bX =>**Y = 3.095 + 1.127X**

விளக்கம் 02:

விசாரணைக்குப் பிறகு, ஒரு நகரத்தில் ஆட்டோமொபைல்களுக்கான தேவை முக்கியமாக, முழுவதுமாக இல்லாவிட்டாலும், அந்த நகரத்தில் வசிக்கும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்தது. 2019 ஆம் ஆண்டிற்கான ஐந்து நகரங்களில் ஆட்டோமொபைல்களின் விற்பனை மற்றும் அந்த நகரங்களில் வசிக்கும் குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை ஆகியவை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

நகரம்	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை (லட்சங்களில்): X	ஆட்டோமொபைல் விற்பனை ('000 இல்): ஒய்
பெலகாவி	70	25.2
பெங்களூர்	75	28.6
ஹூப்ளி	80	30.2
நட்பு	60	22.3
மங்களூர்	90	35.4

X இல் Y இன் நேரியல் பின்னடைவு சமன்பாட்டை குறைந்த சதுர முறை மூலம் பொருத்தி, 2020 ஆம் ஆண்டுக்கான விற்பனையை மதிப்பிடவும், 100 லட்சம் குடும்பங்களைக் கொண்ட பெலகாவி நகரத்தில் அதே உறவு உண்மையாக இருப்பதாகக் கருதுகிறது.

தீர்வு:

பின்னடைவு சமன்பாட்டின் கணக்கீடு

நகரம்	**எக்ஸ்**	**மற்றும்**	**எக்ஸ் 2**	**XY**
பெல காவி	70	25.2	4900	1764
பெங்க ளூர்	75	28.6	5625	2145
ஹூப் ளி	80	30.2	6400	2416
	60	22.3	3600	1338
மங்களூ	90	35.4	8100	3186
	375	**141.7**	**28,625**	**10,849**
	∑X	**∑ஒய்**	**$\sum X^2$**	**∑XY**

X இல் Y இன் பின்னடைவு சமன்பாடு: Y = a + bX

இரண்டு சாதாரண சமன்பாடுகள்:

$$\sum Y = Na + b\sum X$$

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$$

மேலே உள்ள சாதாரண சமன்பாடுகளில் மதிப்புகளை மாற்றினால், நாம் பெறுகிறோம்

141.7 = 5a + 375b.. ....(I)

10849= 375a + 28625b....................................... ......(ii)

இந்த சமன்பாடுகளை (i) மற்றும் (ii) ஒரே நேரத்தில் சமன்பாடு முறை மூலம் தீர்க்கலாம் (i) சமன்பாட்டை 75 ஆல் பெருக்கினால்

10627.5 = 375a + 28125b கிடைக்கும்

இப்போது இந்த சமன்பாடுகளை மீண்டும் எழுதுகிறோம்:

10627.5=375a + 28125b

$10849 = 375a + 28625b$

(-) (-) (-).

$-221.5 = \quad -500b$

எனவே இப்போது நம்மிடம் -221.5 = -500b உள்ளது, இதை 500b = 221.5 என மாற்றி எழுதலாம்.

இப்போது, $b = \frac{221.5}{500} = 0.443$

சமன்பாட்டில் (i) b இன் மதிப்பை மாற்றினால், நாம் பெறுகிறோம்

$141.7 = 5a + (375 * 0.443)$

$141.7 = 5a + 166.125$

$5a = 141.7 - 166.125$

$5a = -24.425$

$a = -24.425/5$

$a = -4.885$

இவ்வாறு நாம் a = -4.885 மற்றும் b = 0.443 இன் மதிப்புகளைப் பெற்றோம்.

X இல் Y இன் தேவையான பின்னடைவு சமன்பாடு:

Y = a + bX => **Y = -4.885 + 0.443X**

2020 ஆம் ஆண்டிற்கான பெலகாவி நகரத்தில் மதிப்பிடப்பட்ட ஆட்டோமொபைல்களின் விற்பனை (Y), குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை (X) 100 (லட்சங்களில்):

$Y = -4.885 + 0.443X$

$Y = -4.885 + (0.443 * 100)$

ஒய் = -4.885 + 44.3

Y = 39,415 ('000)

குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை 100,00,000 ஆக இருக்கும் போது வாகனங்களின் விற்பனை 39,415 ஆக இருக்கும்.

விளக்கம் 03:

பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து இரண்டு பின்னடைவு வரிகளைப் பெறுங்கள்:

மூலதன வேலை (ரூ. லட்சத்தில்:	7	8	5	9	12	9	10	15
விற்பனை அளவு (ரூ. லட்சத்தில்:	4	5	2	6	9	5	7	12

தீர்வு:

பின்னடைவுசமன்பாட்டின் கணக்கீடு

X	Y	X^2	Y^2	XY
7	4	49	16	28
8	5	64	25	40
5	2	25	4	10
9	6	81	36	54
12	9	144	81	108
9	5	81	25	45
10	7	100	49	70
15	12	225	144	180
75	**50**	**769**	**380**	**535**
$\sum X$	$\sum Y$	$\sum X^2$	$\sum Y^2$	$\sum XY$

Y இல் X இன் பின்னடைவு கோடு/சமன்பாடு:$(X – \dot{X}) = bxy\ (Y – \dot{Y})$

$\dot{X} = {}^{\sum X}/n = 75/8 = 9.375$. $Y = \sum Y/n = 50/8 = 6.25$

X இல் Y இன் பின்னடைவு கோடு/சமன்பாடு:$(Y – \dot{Y}) = byx\ (X – \dot{X})$

$\dot{X} = \underline{\sum X}\ /\ n = \underline{75 / 8} = 9.375$

Y இல் X இன் பின்னடைவு குணகம்:
B= (8* 535) – (75*50) / (8*380) – (50)2
=4280 – 3750 / 3040 – 2500
= 530 / 540
= 0.9815.

$(X-\dot{X}) = b_{xy}(Y-\dot{Y})$

⇨ $X-9.375=0.9815(Y-6.25)$

⇨ $X-9.375=0.9815Y-6.1344$

⇨ $X=9.375-6.1344+0.9815Y$

$X=3.2406+0.9815Y$

X இல் Y இன் பின்னடைவு குணகம்:

B = (B= (8* 535) – (75*50) / (8*769) – (75)2
=4280 – 3750 / 6152 – 3750
= 530 / 527
= 1.0057.

$(Y-\dot{Y}) = b_{yx}(X-\dot{X})$

⇨ $Y-6.25=1.0057(X-9.375)$

⇨ $Y-6.25=1.0057X-9.4284)$

⇨ $Y=6.25-9.4284+1.0057X$

⇨ $\mathbf{Y=-3.1784+1.0057X}$

விளக்கம் 04:

பின்வரும் தகவல்களிலிருந்து பின்னடைவு சமன்பாடுகளைக் கண்டறிந்து, திறன் பயன்பாடு 70% ஆக இருக்கும் போது உற்பத்தியை மதிப்பிடவும்.

	சராசரி (சராசரி)	நிலையான விலகல்
உற்பத்தி (லட்சம் அலகுகளில்)	42	12.5
கொள்ளளவு பயன்பாடு (%)	88	8.5
தொடர்பு குணகம் (*r*)	0.72	

தீர்வு:

உற்பத்தி மாறி X ஆகவும், திறன் பயன்பாடு மாறி Y ஆகவும் இருக்கட்டும். திறன் பயன்பாட்டின் அடிப்படையில் உற்பத்தியின் பின்னடைவு சமன்பாடு X இல் Y ஆல் கொடுக்கப்படும் மற்றும் உற்பத்தியின் திறன் பயன்பாட்டின் பின்னடைவு சமன்பாடு Y இல் X இல் கொடுக்கப்படும், இது கணக்கிடப்படலாம். கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது:

கொடுக்கப்பட்ட தகவல்: $\dot{X}$ = 42 $\dot{Y}$ = 88 σx = 12.5 σy = 8.5 r = 0.72

ஒய் மீது X இன் பின்னடைவு குணகம்: X இல் Y இன் பின்னடைவு குணகம்:

Y இல் X இன் பின்னடைவு

சமன்பாடு: $(X - \dot{X})$

$= bxy (Y - \dot{Y})$

⇨$X - 42 = 1.0588 (Y - 88)$

⇨$X = 42 - 93.1744 + 1.0588Y$

⇨**$X = -51.1744 + 1.$**

X இல் Y இன் பின்னடைவு

சமன்பாடு: $(Y - \dot{Y})$

$= byx (X - \dot{X})$

⇨$Y - 88 = 0.4896 (X - 42)$

⇨$Y = 88 - 20.5632 + 0.4896X$

⇨**$Y = 67.4368 + 0.4896X$**

திறன் பயன்பாடு 70% ஆக இருக்கும் போது உற்பத்தியின் மதிப்பீடு Y இல் X பின்னடைவு சமன்பாடு ஆகும், இங்கு Y = 70

Y இல் X இன் பின்னடைவு சமன்பாடு:

$(X - \dot{X}) = bxy (Y - \dot{Y})$

$X = -51.1744 + 1.0588Y$

$= -51.1744 + (1.0588 * 70)$

$= -51.1744 + 74.116$

$=$**22.9416**

எனவே, மதிப்பிடப்பட்ட உற்பத்தி இருக்கும்**22,94,160** 70% திறன் பயன்பாடு இருக்கும் போது அலகுகள்.

விளக்கம் 05:

பின்வரும் தரவு 10 விளையாட்டு வீரர்களின் வயது மற்றும் இரத்த அழுத்தம் (BP) கொடுக்கிறது.

பெயர்	:	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
வயது (X)	:	42	36	55	58	35	65	60	50	48	51
BP(Y)	:	98	93	110	85	105	108	82	102	118	99

I. .X இல் Y இன் பின்னடைவு சமன்பாடு மற்றும் Y இல் X (எண்கணித சராசரியிலிருந்து விலகல் முறையைப் பயன்படுத்தவும்)

ii. பின்னடைவு குணகங்களைப் பயன்படுத்தி தொடர்பு குணகத்தை (r) கண்டறியவும்.

iii. 45 வயதுடைய ஒரு விளையாட்டு வீரரின் இரத்த அழுத்தத்தை மதிப்பிடவும்.

தீர்வு:

பின்னடைவு சமன்பாட்டின் கணக்கீடு

பெயர்	**வயது (X)**	**BP(Y)**	**x=X-Ẋ x=X-50**	**y=Y-Ẏ y=Y-100**	x^2	y^2	**xy**
A	42	98	-8	-2	64	4	16
B	36	93	-14	-7	196	49	98
C	55	110	5	10	25	100	50
D	58	85	8	-15	64	225	-120
E	35	105	-15	5	225	25	-75
F	65	108	15	8	225	64	120
G	60	82	10	-18	100	324	-180
H	50	102	0	2	0	4	0
I	48	118	-2	18	4	324	-36
J	51	99	1	-1	1	1	-1
	500 $\sum X$	**1,000** $\sum Y$	**0** $\sum x$	**0** $\sum y$	**904** $\sum x^2$	**1,120** $\sum y^2$	**-128** $\sum xy$

$\dot{X}=\frac{\sum X}{n}=\frac{500}{10}=50$ $\dot{Y}=\frac{\sum Y}{n}=\frac{1000}{10}=100$

$\dot{X}=\frac{\sum X}{n}=\frac{500}{10}=50$ $\dot{Y}=\frac{\sum Y}{n}=\frac{1000}{10}=100$

பின்னடைவு குணகங்களை பின்வரும் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி கணக்கிடலாம்:

பி$_{xy}$= $\frac{\sum}{\quad}$ 2 எங்கே *எக்ஸ்*= X - ஒய் - Ẏ

பி$_{yx}$= $\frac{\sum}{\quad}$ Ẋ மற்றும் *மற்றும்*=

$\sum$ $\sum$ 2

Y இல் X இன் பின்னடைவு சமன்பாடு:

(X – Ẋ) = bxy (Y – Ẏ)

⇨X – 50 = -0.1143 (Y – 100)

⇨X – 50 = -0.1143Y + 11.43

⇨X = 50 + 11.43 - 0.1143Y

⇨**X = 61.43 - 0.1143Y**

X இல் Y இன் பின்னடைவு சமன்பாடு:

$(Y - \dot{Y}) = byx\ (X - \dot{X})$

⇨$Y - 100 = -0.1416\ (X - 50)$

⇨$Y - 100 = -0.1416X + 7.08$

⇨$Y = 100 + 7.08 - 0.1416X$

⇨$\mathbf{Y = 107.08 - 0.1416X}$

பின்னடைவு குணகத்தைப் பயன்படுத்தி தொடர்பு குணகத்தின் கணக்கீடு:

$r = \sqrt{bxy * byx} = -\sqrt{0.1143 * 0.1416} = -\sqrt{0.01618488} = -0.1272$

எனவே, விளையாட்டு நபரின் வயது மற்றும் இரத்த அழுத்தத்திற்கு இடையே எதிர்மறையான தொடர்பு குறைவாக உள்ளது.

X=45 வயதுடைய ஒரு விளையாட்டு வீரரின் இரத்த அழுத்தத்தின் (Y) மதிப்பீட்டை X இல் Y என்ற பின்னடைவு சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்தி கணக்கிடலாம்:

X இல் Y இன் பின்னடைவு சமன்பாடு:

$(Y - \dot{Y}) = byx\ (X - \dot{X})$

⇨$Y = 107.08 - 0.1416X = 107.08 - (0.1416 * 45) = 107.08 - 6.372 =$ **<u>100.708</u>**

அதாவது 45 வயதுடைய ஒரு விளையாட்டு வீரரின் இரத்த அழுத்தம் 101 (வட்டமானது) என்று மதிப்பிடப்பட்டுள்ளது.

விளக்கம் 06:

இரண்டு தொடர் குறியீட்டு எண்கள் உள்ளன, ***பி***விலைக் குறியீடு மற்றும்***எஸ்***பொருட்களின் இருப்புக்கு. சராசரி மற்றும் நிலையான விலகல்*பி*100 மற்றும் 8 மற்றும்*எஸ்*முறையே 103 மற்றும் 4 ஆகும். இரண்டு தொடர்களுக்கு இடையே உள்ள தொடர்பு குணகம் 0.4 ஆகும். இந்தத் தரவைக் கொண்டு, மதிப்புகளைப் படிக்க நேரியல் சமன்பாட்டை உருவாக்கவும்*பி*பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு*எஸ்.* அதே சமன்பாட்டை மதிப்புகளை படிக்க பயன்படுத்த முடியுமா?*எஸ்*பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு*B*?

தீர்வு:

என்று வைத்துக்கொள்வோம்*பி*=விலை அட்டவணை X an மாறி இருக்கும்*எஸ்*=பண்டத்தின் பங்கு மாறி Y. S இன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு P இன் மதிப்புகளைப் படிக்க நேரியல் சமன்பாடு Y இல் X இன் பின்னடைவு சமன்பாடாக இருக்கும். பின்னடைவு குணகம் சராசரி மற்றும் நிலையான விலகலைப் பயன்படுத்தி கணக்கிடப்பட வேண்டும்.

சிக்கலில் இருந்து நாம் கொடுக்கப்பட்ட தகவலை பட்டியலிடலாம்:

$\dot{X} = 100\ \dot{Y} = 103\ \sigma x = 8\ \sigma y = 4\ r = 0.4$

Y இல் X இன் பின்னடைவு சமன்பாடு:

(X – Ẋ) = bxy (Y – Ẏ)

⇨ ⇨(X – Ẋ) = r^{α}

σy / Y - Ẏ)

- (X – 100) = (0.4∗^{8})(Y– 103)

4

⇨(X – 100) = 0.8 (Y – 103)

⇨(X – 100) = 0.8Y – 82.4

⇨X = 100 – 82.4 + 0.8Y

⇨**X = 17.6 + 0.8Y**

மதிப்புகளை படிக்க நேரியல் சமன்பாடு*பி*பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு

X = 17.6 + 0.8Y P இன் பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு S இன் மதிப்புகளைப் படிக்க, X இல் Y இன் பின்னடைவு சமன்பாடு தேவை, எனவே மேலே உள்ள நேரியல் சமன்பாட்டைப் பயன்படுத்த முடியாது. எனவே, X இல் Y இன் பின்வரும் பின்னடைவு சமன்பாடு கணக்கிடப்படுகிறது:

(Y-Y) = byx (X-X)

= (Y- 103) = 0.4 *4 – (X – 100) / 8.

⇨(Y – 103) = 0.2 (X – 100)

⇨Y – 103 = 0.2X – 20

⇨Y = 103 - 20 + 0.2X

⇨**Y = 83 + 0.2X**

எனவே, பல்வேறு மதிப்புகளுக்கு S இன் மதிப்புகளைப் படிக்க நேரியல் சமன்பாடு*பி*Y = 83 + 0.2X ஆகும்

தொடர்பு மற்றும் பின்னடைவு பகுப்பாய்வு பற்றிய ஆய்வு:

தொடர்பு பகுப்பாய்வில், படிக்கும் இரண்டு மாறிகள் தொடர்புடையதா அல்லது ஒன்றோடொன்று தொடர்புடையதா என்பதை அறிய நாம் ஆர்வமாக இருக்கும்போது, ஒன்றோடொன்று தொடர்புடையதாக இருந்தால், தொடர்புகளின் வலிமை என்ன. சிறந்த அளவீடு கார்ல் பியர்சனின் தொடர்பு குணகம் மூலம் தொடர்பு நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது. இருப்பினும், இந்த முறையின் ஒரு கடுமையான வரம்பு என்னவென்றால், இது இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையே ஒரு நேரியல் உறவின் விஷயத்தில் மட்டுமே பொருந்தும். இரண்டு மாறிகள் X மற்றும் Y ஆகியவை சுயாதீனமானவை அல்லது தொடர்புபடுத்தவில்லை எனில், தொடர்பு

குணகத்தின் விளைவு பூஜ்ஜியமாகும்.

இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையிலான நேரியல் உறவை அளவிடும் தொடர்பு குணகம், ஒரு மாறி மற்ற மாறியால் கணக்கிடப்படும் மாறுபாட்டின் அளவைக் குறிக்கிறது. இந்த நோக்கத்திற்கான ஒரு சிறந்த அளவீடு "உறுதியான குணகம்" எனப்படும் தொடர்பு குணகத்தின் சதுரத்தால் வழங்கப்படுகிறது. விளக்கப்பட்ட மாறுபாட்டிற்கும் மொத்த மாறுபாட்டிற்கும் இடையிலான விகிதமாக இதை விளக்கலாம்:

R^2 = Explained Variance / Total Variance

இதேபோல், நிர்ணயம் செய்யாத குணகம் = $(1 - r^2)$

பின்னடைவு பகுப்பாய்வு என்பது இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையே ஒரு செயல்பாட்டு உறவை நிறுவுதல் மற்றும் எதிர்காலத் திட்டத்தை உருவாக்குவதற்கு இந்த உறவைப் பயன்படுத்துதல். இது எந்த வகையான தொடர்பு நேரியல் மற்றும் கர்விலினியர் ஆகியவற்றிற்கான தொடர்பு போலல்லாமல் பயன்படுத்தப்படலாம். பின்னடைவின் இரண்டு கோடுகள் ஒத்துப்போகின்றன, அதாவது r= -1 அல்லது +1 வேறு வார்த்தைகளில் கூறினால், r = 0 என்றால், விவாதத்தில் உள்ள இரண்டு மாறிகளுக்கு இடையே சரியான எதிர்மறை அல்லது நேர்மறை தொடர்பு இருந்தால், பின்னடைவு கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும்.

அலகு – V – குறியீட்டு எண்கள்

குறியீட்டு எண் என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் தொடர்புடைய மாறிகளின் குழுவில் ஏற்படும் மாற்றத்தை அளவிட வடிவமைக்கப்பட்ட ஒரு சிறப்பு சராசரி. இது முதன்முதலில் ஆண்டு கட்டப்பட்டது

கருத்து

குறியீட்டு எண்ணில் அதன் எளிய வடிவத்தில் இரண்டு எண்களின் விகிதம் சதவீதமாக வெளிப்படுத்தப்படுகிறது.

வரையறை

தொடர்புடைய மாறிகளின் குழுவின் அளவு வேறுபாட்டை அளவிடுவதற்கான குறியீட்டு எண் சாதனங்கள் - க்ரோக்ஸ்டன் மற்றும் கவ்டன்

குறியீட்டு எண்ணின் பண்புகள்

- அவை சிறப்பு சராசரி
- அவை தொடர்புடைய மாறிகளின் குழுவில் நிகர மாற்றத்தை அளவிடுகின்றன
- அவை ஒரு குறிப்பிட்ட காலப்பகுதியில் ஏற்படும் மாற்றங்களின் விளைவை அளவிடுகின்றன
- அவை மாறிகளின் குழுக்களை நேரடியாக ஒப்பிட உதவுகின்றன

குறியீட்டு எண்ணின் பயன்பாடுகள்

- குறியீட்டு எண் மிகவும் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படும் புள்ளியியல் சாதனங்கள்
- ஒப்பீட்டு மாற்றங்களை அளவிட குறியீட்டு எண்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன
- வணிக மற்றும் பொருளாதார நிலைமைகளின் மதிப்பீட்டில் அவை பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன
- சிறந்த ஒப்பீடுக்கு இது பயனுள்ளதாக இருக்கும்
- ஒவ்வொரு நாட்டின் முன்னேற்றத்திற்கும் இது ஒரு நல்ல வழிகாட்டி
- சிறந்த ஒப்பீடுக்கு இது பயனுள்ளதாக இருக்கும்
- போக்குகள் மற்றும் நுட்பங்களை அறிந்து கொள்வது பயனுள்ளதாக இருக்கும்
- எதிர்கால நடவடிக்கைகளை முன்னறிவிப்பதற்காக

குறியீட்டு எண்களின் வகைகள்

➢விலைக் குறியீடு
➢அளவு குறியீட்டு
➢மதிப்பு குறியீடு

குறியீட்டு எண்ணின் முறைகள்

➢கணக்கிடப்படாத குறியீட்டு எண்
➢எளிய திரட்டல் முறை
➢விலை ஒப்பீட்டு முறையின் எளிய சராசரி

எடையிடப்பட்ட குறியீட்டு எண்

1.Laapeyre இன் குறியீட்டு எண் $P01 = \dfrac{\sum p1q0}{\sum P0q0}\ 100$

2.பாஸ்சி முறை

$$. P01 = \frac{\sum p1q1}{\sum P0q0}\ 100$$

3.பவுலி மற்றும் டார்ஃபிஷ் முறை

$$P01 = \frac{\sum p1q0}{\sum P0q0} + \frac{\sum p1q0}{\sum P0q0}$$

4.ஃபிஷரின் ஐடியல் முறை அல்லது ஃபிஷர்ஸ் விலை குறியீட்டு எண்

$P01 = \sqrt{}\ L \times P$

நுகர்வோர் விலை குறியீட்டு எண் (அல்லது) வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீடு

சில்லறை விலையில் ஏற்படும் மாற்றத்தால் தொழிலாளர்களின் வாழ்க்கைச் செலவில் ஏற்படும் மாற்றத்தை அளவிட நுகர்வோர் விலைக் குறியீடு வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. விலைவாசியில் ஏற்படும் மாற்றம் மக்களின் வாழ்க்கைச் செலவை பாதிக்கிறது. மக்கள் பல்வேறு வகையான பொருட்களை நம்புகிறார்கள். எனவே நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டை

உருவாக்க வேண்டும். நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டை பல நோக்கங்களுக்காக வெவ்வேறு இடங்களில் பயன்படுத்தலாம்.

வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டின் பயன்பாடுகள்

➢ஊதியத்தை நிர்ணயம் செய்ய இது பயனுள்ளதாக இருக்கும்

➢பணத்தின் வாங்கும் சக்தியை அறிவது பயனுள்ளது

➢வாழ்க்கைச் செலவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி அரசாங்கம் விலை மற்றும் பிற மாறிகளை நிர்ணயிக்கிறது

➢விலை நிலைமைகளின் பகுப்பாய்வு பயனுள்ளதாக இருக்கும்

குறியீட்டு எண்களின் வரம்புகள்

➢தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட அடிப்படை ஆண்டு சாதாரணமாக இல்லாவிட்டால், நோக்கம் பட்டியல்

➢ஒவ்வொரு குறியீட்டு எண்ணுக்கும் அதன் சொந்த நோக்கம் உள்ளது. எந்த ஒரு குறியீட்டு எண்ணும் அனைத்து நோக்கங்களுக்கும் சேவை செய்ய முடியாது

➢இவை ஒப்பீட்டு மட்டத்தின் பொருத்தமான அறிகுறிகள் மட்டுமே.

தீர்க்கப்பட்ட சிக்கல்கள்

பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து 2013ஐ அடிப்படையாகக் கொண்டு 2014க்கான குறியீட்டு எண்ணை உருவாக்கவும்

பண்டம்	**2013 இல் விலை (ரூ)**	**2014 இல் விலை (ரூ)**
A	50	60
B	40	80
C	70	110
D	90	70
E	50	40

தீர்வு

பண்டம்	**2013 இல் விலை (ரூ)**	**2014 இல் விலை (ரூ)**
A B	50 40	60 80
C D E	70 90 50	110 70 40
	$\sum p_0 = 300$	**$\sum p_1 = 360$**

விலை குறியீட்டு P01 $= \dfrac{\sum p1}{\sum p0} \times 100 = \dfrac{360}{300} \times 100 = 120$

அதாவது, 2013ஆம் ஆண்டை ஒப்பிடுகையில், 2014ஆம் ஆண்டில் பொருட்களின் விலைகள் 20% அளவுக்கு நிகரமாக உயர்ந்துள்ளன.

பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து ஃபிஷரின் சிறந்த குறியீட்டைக் கணக்கிடுங்கள்

பொருள்	2000		2003	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	6	50	10	56
B	2	200	2	120
C	4	60	6	60
D	10	30	12	24
E	8	40	12	36

தீர்வு

பொருள்	P0	Q0	P1	Q1	p1q0	P0q0	p1q1	P0q1
A	6	50	10	56	500	300	560	336
B	2	100	2	120	200	200	240	240
C	4	60	6	60	360	240	360	240
D	10	30	12	24	360	300	288	240
E	8	40	12	36	480	320	432	288
					∑ p1q0=1900	∑ P0q0 =1360	∑ p1q1 =1880	∑ P0q1 =1344

P01 = √ L X P

∑p1q0 ∑p1q0

P01 = √ x

∑P0q0 ∑P0q0

= √ 1,3971 X 1.3988 X 100

= 1.39796 X 100 = 139.80

நேர வரிசையின் பகுப்பாய்வு

நிகழ்வின் நேரம் அல்லது காலவரிசைப்படி புள்ளியியல் தரவுகளின் ஏற்பாடு நேரத் தொடர் எனப்படும்.

வரையறை

ஒரு நேரத் தொடர் என்பது காலவரிசைப்படி அமைக்கப்பட்ட கண்காணிப்புத் தொகுப்பாகும். MorrisHamberg இன் நேரத் தொடர் தரவு நீண்ட காலத்திற்குக் கிடைக்க வேண்டும். தரவு வெவ்வேறு காலகட்டங்களைச் சேர்ந்த ஒரே மாதிரியான மதிப்புகளைக் கொண்டிருக்க வேண்டும். மாறிகள் அல்லது மாறிகளின் கலவை ஆகியவற்றுக்கு இடையேயான நேர இடைவெளி, கடந்து செல்லக்கூடிய சமமானதாக இருக்க வேண்டும்.

நேரத் தொடரின் பயன்கள்

i.இது கடந்த கால நடத்தைகளைப் புரிந்துகொள்வதற்கும் எதிர்கால நடத்தையை நிறுவுவதற்கும் உதவுகிறது

iiஇது எதிர்காலச் செயல்பாட்டைத் திட்டமிடுவதற்கும் முன்னறிவிப்பதற்கும்

உதவுகிறது

iiiஇது ஒரு காலகட்டத்தின் தரவையும் மற்றொரு காலகட்டத்தின் தரவையும் ஒப்பிட்டுப் பார்க்க உதவுகிறது

iv.தற்போதைய சாதனையை மதிப்பிடுவதற்கு இது உதவுகிறது

v. உள்ளேவர்த்தக சுழற்சிகளை முன்னறிவிப்பதில் இது பயனுள்ளதாக இருக்கும்

நேர வரிசை மாதிரிகள்

கணித மாதிரிகள் மற்றும் பெருக்கல் முறை

கிளாசிக்கல் பகுப்பாய்வில், நேரத் தொடரின் நான்கு கூறுகளுக்கு இடையே சில வகையான உறவுகள் இருப்பதாகக் கருதப்படுகிறது

1.சேர்க்கை மாதிரி

இந்த மாதிரியின் படி, நேரத் தொடர் இவ்வாறு வெளிப்படுத்தப்படுகிறது

ஒய் = டி + எஸ் + சி + ஐ

Y = அசல் நேரத் தொடரின் மதிப்பு

T = நேர மதிப்பு

S = பருவகால மாறுபாடு

C = சுழற்சி மாறுபாடு ஒழுங்கற்ற ஏற்ற இறக்கம்

பெருக்கல் மாதிரி

இந்த மாதிரியின் படி, நேரத் தொடர் இவ்வாறு வெளிப்படுத்தப்படுகிறது

Y = Y X S X C X I

நேரத் தொடர் பகுப்பாய்வு

➢நேரத் தொடர் பகுப்பாய்வு என்பது ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத் தொடர் தரவுகளில் போக்கு, பருவகாலம், சுழற்சி மற்றும் ஒழுங்கற்றது போன்ற பல்வேறு கூறுகளை அடையாளம் காண்பதற்கான பகுப்பாய்வு ஆகும்.

➢நேரத் தொடரின் கூறுகள்

➢நேரத் தொடர் தரவு பின்வரும் வகைகளின் மாறுபாடுகளைக் கொண்டுள்ளது

1.மதச்சார்பற்ற போக்கு

2.பருவகால மாறுபாடு

3.சுழற்சி மாறுபாடுகள்

4.ஒழுங்கற்ற மாறுபாடு

1.மதச்சார்பற்ற போக்கு

ஒரு மதச்சார்பற்ற போக்கு அல்லது நீண்ட கால போக்கு என்பது நீண்ட காலத்திற்கு தொடர்ச்சியான வளர்ச்சி அல்லது சரிவை பிரதிபலிக்கும் தொடரின் இயக்கங்களைக் குறிக்கிறது. பல வகையான போக்குகள் உள்ளன. சில போக்குகள் மேல்நோக்கி உயர்கின்றன, சில கீழ்நோக்கி விழுகின்றன

2.பருவகால மாறுபாடு

வணிக நடவடிக்கைகளில் குறிப்பிட்ட கால முதலீடு என்பது ஆண்டுக்கு ஆண்டு மீண்டும் மீண்டும் வருமா**?**

பொதுவாக, பருவகால மாறுபாடு வாராந்திர, மாதாந்திர அல்லது காலாண்டு இடைவெளியில் தோன்றும்**3.சுழற்சி மாறுபாடு**

மேல் மற்றும் கீழ் இயக்கங்கள் பருவகால ஏற்ற இறக்கங்களிலிருந்து வேறுபட்டவை, அவை நீண்ட காலத்திற்கு நீட்டிக்கப்படுகின்றன - பொதுவாக இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட ஆண்டுகள். வணிக நேரத் தொடர் செழிப்பு மற்றும் மனச்சோர்வின் மாற்றங்கள் போன்ற அலைகளால் பாதிக்கப்படுகிறது.

காரணங்கள்

சொத்து மாற்றங்கள் மற்றும்
மனச்சோர்வு பயன்பாடுகள்

நான்)வணிக ஏற்ற இறக்கத்தின் தன்மையைப் படிக்க பயனுள்ளதாக இருக்கும்

II)வெவ்வேறு நிலைகளில் வணிகத்தை பராமரிப்பதில் சரியான நேரத்தில் முடிவெடுப்பது பயனுள்ளதாக இருக்கும்III)மந்தநிலையை எதிர்கொள்ளவும் ஏற்றங்களைப் பயன்படுத்தவும் உதவுகிறது

மதச்சார்பற்ற மாறுபாடு

ஒழுங்கற்ற மாறுபாடு என்பது வணிக நடவடிக்கைகளில் இத்தகைய மாறுபாட்டைக் குறிக்கிறது. அவை 'ஒழுங்கற்ற' தற்செயலான அல்லது சீரற்ற மாறுபாடுகள் என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன, அவை பொதுவாக மீண்டும் நிகழாத மற்றும் கணிக்க முடியாதவை

காரணங்கள்

போர், உணவு, புரட்சி, வேலைநிறுத்தம், கதவடைப்பு மற்றும் பல

மதச்சார்பற்ற போக்கின் மதச்சார்பற்ற அளவீடு

a)இலவச கை வரைகலை முறை

b)இந்த முறையில் நாம் அசல் தரவை வரைபடத்தில் திட்டமிட வேண்டும். போக்கின் திசையைக் காட்டும் மென்மையான வளைவை கவனமாக வரையவும். நேரம் கிடைமட்ட அச்சு I(X) மற்றும் செங்குத்து அச்சில் உள்ள மாறியின் மதிப்பு (Y)

தகுதிகள்

அ.இது எளிமையான மற்றும் எளிதான முறையாகும்

பி.இது அனைத்து வகையான போக்குகளுக்கும் பயன்படுத்தப்படலாம்
c.நேரத் தொடரின் தன்மையைப் புரிந்துகொள்வது பயனுள்ளது

குறைபாடுகள்

அ.இது தனிப்பட்ட சார்புக்கு உட்பட்டது
பி.அதன் முடிவுகள் நேரத்தை வரைந்த நபரின் தீர்ப்புகளைப் பொறுத்தது
c.போக்கை அளவிட இது உதவாது

அரை - சராசரி முறை

இந்த முறையில் அசல் தரவு இரண்டு சம பாகங்களாக பிரிக்கப்பட்டு சராசரியாக இருக்கும்
இரண்டு பகுதிகளுக்கும் கணக்கிடப்பட்டது. இந்த சராசரிகள் அரை சராசரி என்று அழைக்கப்படுகின்றன. அரை சராசரிகளின் உதவியுடன் போக்குக் கோடு வரையப்படுகிறது

தகுதிகள்

நான்)இது எளிமையானது மற்றும் புரிந்துகொள்ள எளிதானது
II)எல்லோருக்கும் ஒரே மாதிரியான போக்கு வரும்
III)இடைநிலை மதிப்புகளின் அடிப்படையில் எதிர்கால மதிப்புகளை நாம் கணிக்க முடியும்

குறைபாடுகள்

நான்)இது எண்கணித சராசரியின் வரம்புகளால் பாதிக்கப்படுகிறது
II)எதிர்கால போக்கை கணிக்க இது போதாது

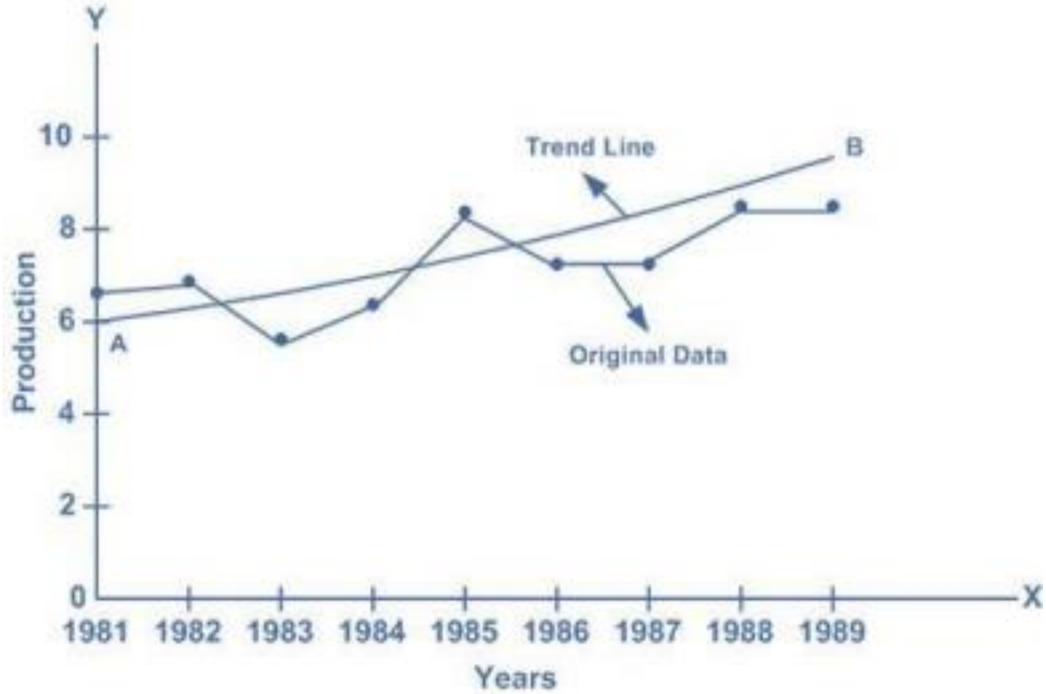
நகரும் சராசரி முறை

இந்த முறையில், பல ஆண்டுகள் அல்லது மாதங்கள் அல்லது வாரங்களின் சராசரி மதிப்பு கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டு, கால இடைவெளியின் மையத்தில் வைக்கப்படும், இது நடுத்தர காலத்திற்கான இயல்பான அல்லது போக்கு மதிப்பாகும்.

தீர்க்கப்பட்ட சிக்கல்கள்

Free-HandTrendline1985

ஆண்டு	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
உற்பத்தி டன்கள்	0	2	40	6	8	10	6	8	8



சராசரியாக நகர்கிறது

1.பின்வரும் நேரத் தொடர் தரவுகளிலிருந்து 3 ஆண்டு நகரும் சராசரியைக் கண்டறியவும்

ஆண்டு	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
விற்பனை(இன் டன்)	30.1	45.4	39.3	41.4	42.2	46.4	46.6	49.2

தீர்வு

ஆண்டு	**விற்பனை (டன்களில்)**	**3 வருடத்திற்கு ஒருமுறை நகரும் மொத்தம்**	**3 ஆண்டு நகர்வு மதிப்பு**
1998	30.1	-------	-------

1999	45.4	114.8	38.27
2000	39.3	126.1	42.03
2001	41.4	122.9	40.97
2002	42.2	130.0	43.33
2003	46.4	135.2	45.07
2004	46.6	142.2	47.40
2005	49.2	-------	----------

1.பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து 5 வருட நகரும் சராசரியைக் கணக்கிடவும்

ஆண்டு	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
எண்ணிக்கை மாணவர்கள்	705	685	703	687	705	689	715	685	725	730

தீர்வு

ஆண்டு	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	5 வருட நகர்வு மொத்தம்	நகரும் மதிப்பு
1998	**705**	**--**	**--**
1999	**685**	**--**	**--**
2000	**703**	**3485**	**697.0**
2001	**687**	**3469**	**693.8**
2002	**705**	**3499**	**699.8**
2003	**689**	**3481**	**696.2**
2004	**715**	**3519**	**703.8**
2005	**685**	**3544**	**708.8**
2006	**725**	**---**	**--**
2007	**730**	**--**	**--**

2.பின்வரும் தரவுக்கான நான்கு - ஆண்டு நகரும் சராசரியைக் கணக்கிடவும்

ஆண்டு	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
உற்பத்தி (in '000டன்கள்)	464	515	518	467	502	540	557	570	586	612

தீர்வு

ஆண்டு	**000 டன்களில் உற்பத்தி**	**4 வருடத்திற்கு ஒருமுறை நகரும்**	**ஒருங்கிை மொத்த**	**சராசரி**
1998	464			
1999	515			
		1964		
2000	518		3966	495.75
		2002		
2001	467		4029	503.63
		2027		
2002	502		4093	511.63
		2066		
2003	540		4236	529.50
		2170		
2004	557		4424	553.00
		2254		
2005	570		4580	572.50
		2326		
2006	586			
2007	612			

1.குறைந்த சதுர முறையின் மூலம் பின்வருவனவற்றிலிருந்து போக்கைக் கணக்கிடவும்

ஆண்டு	2000	2001	2002	2003	2004
உற்பத்தி லட்சங்களில்	830	920	710	900	1690

தீர்வு

போக்கு மதிப்புகளின் கணக்கீடு

ஆண்டு	**லட்சத்தில் உற்பத்தி (Y)**	**2002(X) இலிருந்து விலகல்**	**XY**	**X2**
2000	830	-2	-1600	4
2001	920	-1	-920	1
2002	710	0	0	0
2003	900	1	900	1
2004	1690	2	3380	4
	∑y = 5050	**∑x = 0**	**∑xy=1700**	**$\sum x^2$=10**

∑x = 0 என்பதால்

∑y

a = ---- = 5050 /

5 = 1010N

b = ∑xy ∑x^2

Y = a + bx

==1010 + 170x

Yc = 1010 + 170

X

எப்போது x= -2

Y2000 = 1010 + 170 (-2) = 1010 -340 = 670

X = -1 போது

Y2001 = 1010 + 170 (-1) = 1010 -170 = 840 X = 0

Y2002 =1010 + 170 (0) = 1010 -0 = 1010 X =1 போது

Y2003 = 1010 + 170 (-1) = 1010 +170 = 1180 X=2 போது

Y2003 = 1010 + 170 (2) = 1010 + 340 = 1350.